ÁREA DE REGIÕES ATRAVÉS DO GOOGLE MAPS UTILIZANDO POLINÔMIO DE NEWTON E CÁLCULO INTEGRAL

Gilberto Emanoel Reis Vogado

Afiliação: Escola Ten. Rêgo Barros. E-Mail: gvogado@globo.com

Pedro Roberto Silva

Afiliação: Escola Ten. Rêgo Barros. E-mail:prof.pedromat@hotmail.com

Gustavo Nogueira Dias;

Afiliação: Escola Ten. Rêgo Barros. E-mail: gustavonogueiradias@gmail.com

RESUMO

O presente artigo trata do cálculo de áreas através do *google maps*, utilizando o terreno do Shopping Grão Pará como um estudo de caso, pois é uma área recentemente construída e vista de cima apresenta um aspecto de várias curvas, já com uma área total calculada em 122.000 metros quadrados. O processo foi realizados printando a tela fornecida pelo *google maps* a uma altura que proporcione a escala de 1,8 cm na foto correspondendo a uma distância real de 50m. Feito isso são dispostos eixos coordenados cartesianos x e y e a partir daí são plotados os pontos em duas curvas polinomiais e utilizado o polinômio de Newton e integral para calcular a sua área.

Palavras-chave: google maps; escala; polinômio de Newton; Integral.

1 - Introdução

O artigo a seguir refere-se a respeito do cálculo de áreas que possuam regiões de difícil medição pois tem trajetórias curvilíneas, onde a melhor aplicação seria utilizando integral para o cálculo de sua área.

A partir deste propósito apresento a área do Shopping Grão Pará, pois vista de cima conforme a figura 03. Apresenta estas características, onde seus limites são curvilíneos, e sua área já foi calculada e divulgada em 122.000 m², o que foi usado para fazer uma comparação com a metodologia proposta.

As dificuldades em calcular áreas deste tipo de regiões são muito grandes. Pois elas não representam nenhuma figura plana e sim um aspecto curvilíneo que o estudo do cálculo de integrais propões uma resposta.

2 – Polinômio de Newton

O polinômio de Newton , segundo Barroso, et al (1987) usa o processo de diferença divididas para formar o polinômio interpolador.

Diferenças Divididas, (Barroso et al,2ª ed.p.175, 1987):

Considere a tabela a seguir:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	x_0	y_o			
1	x_1	y_1			
2	x_2	y_2			
3	x_3	y_3			

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} \quad \Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} \quad \Delta^3 y_1 = \frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad \Delta^2 y_2 = \frac{\Delta y_3 - \Delta y_2}{x_4 - x_2} \quad \Delta^3 y_2 = \frac{\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2}{x_5 - x_2}$$

Fórmula de Newton para Interpolação com Diferenças Divididas

$$\boxed{P_n(x) = y_0 + (x - x_0).\ \Delta y_0 + (x - x_0).(x - x_1).\ \Delta^2 y_0 + (x - x_0).(x - x_1).(x - x_2).\ \Delta^3 y_0 + \ldots..}$$

3 – Integral – Cálculo de Áreas

Guidorizzi (2001), seja f contínua em [a,b], com f(x) $\geq$ 0 em [a,b]. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitdo pelas retas x = a, x = b, y – 0 e pelo gráfico

y = f(x),

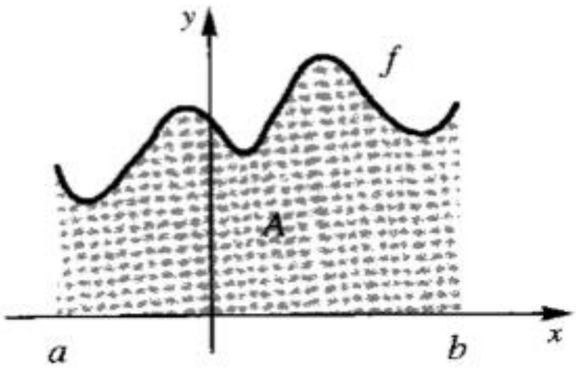

Figura 01.Cálculo da área da região abaixo da curva.Fonte: Guidorizzi (2001).

Seja, então, P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots < x_n = b$ uma partição de [a,b] e sejam $\overline{c_i}$ e $\overline{\overline{c_i}}$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(\overline{c_i})$ é o valor mínimo e $f(\overline{\overline{c_i}})$ o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, uma boa definição de área A deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c_i})\Delta x_i$ seja uma aproximação por falta da área A e que $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{\overline{c_i}})\Delta x_i$ seja uma aproximação por excesso, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c_i})\Delta x_i \leq \text{área A} \leq \sum_{i=1}^{n} f(\overline{\overline{c_i}})\Delta x_i$$

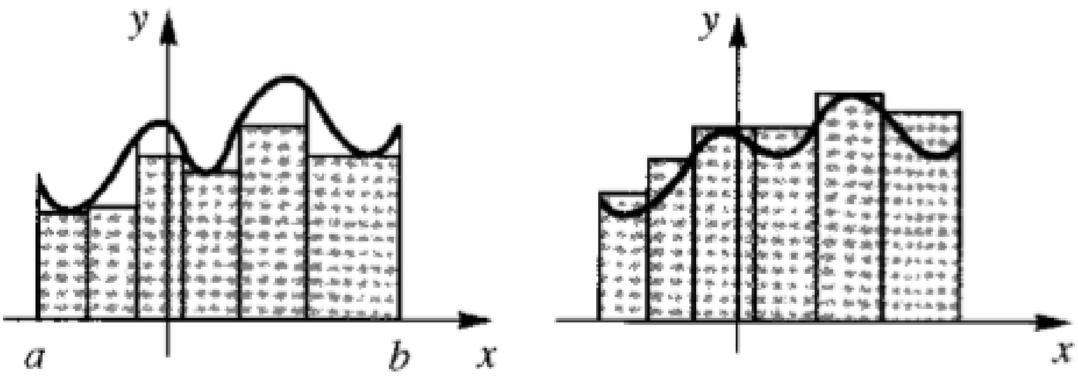

Figura 02. Cálculo da área da região abaixo da curva.Fonte: Guidorizzi (2001).

Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x)dx, \text{quando máx } \Delta x_i \to 0$, a área será definida por:

$$\text{Área} = A = \int_a^b f(x)dx$$

4 – Metodologia

O processo de cálculo da área consistiu na marcação de um eixo de coordenadas cartesianas no ponto ‘’O’’ como marcado na figura 3. Com a escala fornecida no google maps, fazemos a medição com a régua. Com relação a medida depende da proporção que o mapa foi impresso. Neste caso, percebemos que a escala mede 1,4 cm e é equivalente a 50 metros na distância real. A seguir marcamos com escalímetro no eixo x e no eixo y distâncias proporcionais a 1,4 e assim de 50 em 50 metros construímos um plano cartesiano com vários pontos plotados até o limite de “0” a 450 metros no eixo x e de “0” a 600 metros no eixo y.

Na figura 04 a posição da origem pode ser marcada de acordo com a escolha do pesquisador. Neste caso a origem dividiu o mapa em duas partes. Nada impede que a origem seja colocada em outro ponto englobando as duas curvas.

Na *2ª curva, figura 04,* marcamos 8 pontos correspondendo ao “x” de 50 em 50 metros, porém acompanhando a curva não corresponde a exatamente a um ponto exato, onde tem-se que fazer uma proporção para acharmos a ordenada corretamente. Elegemos *três* principais pontos diametralmente opostos, a fim de calcularmos uma polinomial que melhor represente estes dados. A escala deste mapa mede 1,2m e é equivalente a 50 metros na distância real. A seguir marcamos com escalímetro no eixo x e no eixo y distâncias proporcionais a 1,2 e assim de 50 em 50 metros construímos um plano cartesiano com vários pontos plotados até o limite de “0” a 450 metros no eixo x e de “0” a 600 metros no eixo y.

Para termos medidas aproximadamente corretas, na 2ª parte do gráfico da figura 4 temos que virar a folha e calcular a origem como sendo o ponto (0,372) que a partir de agora será (0,0) origem e a partir daí iniciamos novamente todas as marcações

Abaixo segue o mapa visto de cima do shopping Grão Pará, figura 03 e figura 04.

Figura 03. Origem do sistema de cartesianas ortogonais logo no início da figura. Ao lado esquerdo abaixo segue a escala do mapa.

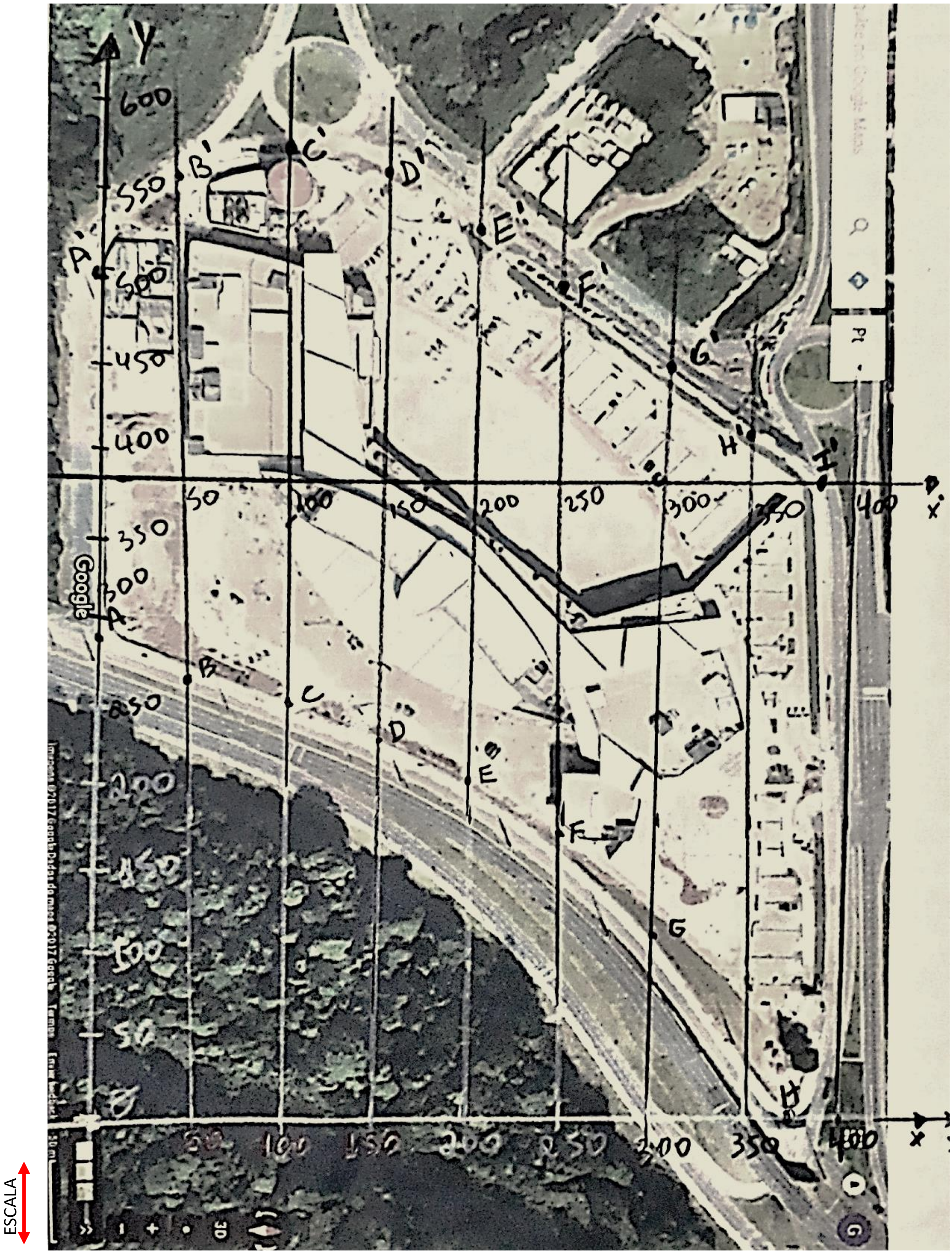

Figura 04: Pontos A,B,C,D,E,F,G,H pontos da 1ª curva. Pontos A’, B’, C’, D’, E’, F’, G’, H’ e I’ pontos da 2ª curva. X, 1º eixo horizontal e X’ 2º eixo horizontal. A nova origem O’, localiza-se no ponto (0,372).

Sejam os n +1 pontos distintos (x_i,y_i) , i = 0,1,2,....,n e $P_n(x)$ o polinômio interpolador de grau n que conterá estes pontos.

Utilizando o conceito de diferença divididas tem-se:

$$P[x, x_0] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0} \quad (I)$$

Portanto:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0).P[x, x_0] \quad (II)$$

Mas, $P[x, x_0, x_1] = \frac{P[x,x_0] - P[x_0,x_1]}{x - x_1}$ (III)

Fazendo I , II em III temos:

A relação de interpolação de Newton utilizando diferenças divididas:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0).\Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1).\Delta^2 y_0 + \\ + (x - x_0).(x - x_1)(x - x_2).\Delta^3 y_0 \quad (IV)$$

Sendo que considerando a tabela a seguir, como sendo a de diferenças divididas temos:

Considere a tabela a seguir:

i	**x_i**	**y_i**	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	x_0	y_0			
1	x_1	y_1			
2	x_2	y_2			
3	x_3	y_3			
4	x_4	y_4			

As relações abaixo usamos para completar a tabela acima e preencher o polinômio interpolador de Newton(IV):

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} \quad \Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} \quad \Delta^3 y_1 = \frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$$

Os pontos da figura 04 são A(0,270) B (200, 190) e C(370, 0). A seguir fazemos a tabela de diferenças divididas, conforme a tabela abaixo:

x	y	Δy	Δ²y
0	270	-0,4	-0,00194
200	190	-1,1176	
370	0		

Utilizando o polinômio interpolador de Newton:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0).\Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1).\Delta^2 y_0 +$$
$$+ (x - x_0).(x - x_1)(x - x_2).\Delta^3 y_0$$

P(x) = 270 + x.(-0,4) + x.(x – 200). (-0,00194)

$P_1(x) = 270 - 0{,}4x - 0{,}00194x^2 + 0{,}388x$

$P_1(x) = 270 - 0{,}012x - 0{,}00194x^2$

A seguir calculamos a área que está abaixo desta primeira curva usando a polinomial $P_1(x)$.

$$A = \int_0^{370} (270 - 0{,}012x - 0{,}00194x^2)dx = 66323 m^2$$

Após isso calculamos a área do retângulo formado pelos eixos x , x' e y, cujas coordenadas no eixo "x" é 370 e no eixo "y" é 380, formando um grande retângulo com essas dimensões. Portanto:

A = 370 x 380 = 142.450 m²

A área da 1ª região abaixo do eixo x' será dado por:

A_1 = 140600 – 66323 = 74.277 m².

Partimos para o cálculo da 2ª polinomial, plotada a partir do eixo x' e a continuação do eixo y. Na 2ª curva marcamos 9 pontos correspondendo ao x' de 50 em 50 metros, porém acompanhando a curva não corresponde a exatamente a um ponto exato, onde tem-se que fazer uma proporção para acharmos a ordenada corretamente.

Esta ordenada é subtraída da nova origem, localizada no ponto 0’ (0,372). Elegemos três principais pontos diametralmente opostos, a fim de calcularmos uma polinomial que melhor represente estes dados. Os pontos escolhidos são A’(0, 128), B’ (200,160) e C’ (386, 0).

x	y	Δy	Δ²y
0	128	0,16	-0,002643
200	160	-0,860215	
386	0		

Utilizando o polinômio interpolador de Newton:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0).\Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1).\Delta^2 y_0 +$$
$$+ (x - x_0).(x - x_1)(x - x_2).\Delta^3 y_0$$

$P_2(x) = 128 + x.0{,}16 + x.(x - 200).\ (-0{,}002643)$

$P_2(x) = 128 + 0{,}16x - 0{,}002643x^2 + 0{,}5286x$

$P_2(x) = 128 + 0{,}6886x - 0{,}002643x^2$

$P_2(x) = 50038$

$$A_2 = \int_0^{386} (128 - 0{,}6886x - 0{,}002643x^2)dx = 50.038m^2$$

$A_{SHOPPING} = A_1 + A_2 = 74.277\ m^2 + 50038\ m^2 = 124.315\ m^2$

5 – Conclusões

Observamos que a área calculada por integrais e a polinomial de grau 2 de Newton apresentou um resultado satisfatório bem próximo do valor real de 122.000m², representando um erro menor que 2%.

As polinomiais do 3º e 4º grau não tiveram o sucesso apresentado pela polinomial do 2º grau, devido ao aspecto principal ser mais semelhante a uma polinomial do 2º grau.

Foi feito curvas de grau até de 6ª ordem, porém não apresentaram resultado esperado com um erro extremamente grande. Pelo processo e o esboço das duas curvas podemos inferir que o grau é diretamente dependente ao número de pontos de inflexões que a curva apresenta.

No caso destas duas curvas, cada uma apresentava a tendência de apenas um ponto de inflexão, portanto a curva escolhida teria necessariamente que ser uma polinomial do 2º grau.

6 – Referências Bibliográficas

BARROSO, L.C. Cálculo Numérico com Aplicações, 2ª Edição, Ed. Harbra, 1987.

GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo, Vol. I, 5ª Edição, Ed. LTC, 2001.

GOOGLE MAPS. Disponível em <www.google.com.br > Acesso em 27 de abr. de 2017.