ANÁLISE DO NÍVEL DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Anderson de Araújo Nascimento
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
anderson_mat@hotmail.com

Abigail Fregni Lins
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
bibilins@gmail.com

Kátia Maria de Medeiros
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
katiamedeirosuepb@gmail.com

Resumo: O presente artigo investigou o nível do pensamento geométrico de alunos do 1º Ano do Ensino Médio a partir da aplicação de uma Proposta Didática. Escolhemos o tema provas e demonstrações por percebemos, diante da revisão da literatura, que há uma lacuna sobre este tema nas aulas de Matemática na Educação Básica. Assim, elaboramos uma Proposta Didática com 18 atividades sobre o tema, dividida em quatro partes, que estimulavam aos alunos refletirem, justificarem e demonstrarem. Essa proposta auxiliou na investigação do conhecimento matemático dos alunos do 1º Ano do Ensino Médio, divididos em 8 duplas e um trio, escolhidos livremente. Para este artigo escolhemos a dupla de alunos que obteve melhor desempenho em nossa Proposta Didática e analisamos as respostas dadas pela dupla na Atividade 3 (Parte II). Para tanto, utilizamos as discussões sobre os níveis do pensamento geométrico proposto por Van Hiele. Os nossos resultados sugerem que a dupla de alunas pôde ser classificada em um dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, o Nível 3, dedução informal, segundo o modelo proposto por Van Hiele. Assim, podemos afirmar que a dupla utiliza de meios empiricos para fundamentar suas justificativas. Por fim, percebemos a necessidade de trabalhar com o tema das provas e demosntrações matemáticas na Educação Básica, adequando seu ensino ao grau de maturidade e aos conhecimentos matemáticos dos alunos, visto que nossos resultados apontam que esse tema não é abordado adequadamente em sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática, Geometria Plana, Provas e Demonstrações Matemáticas, Proposta Didática.

1.INTRODUÇÃO

Este artigo é um recorte, fruto de uma pesquisa de Mestrado Profissional, no PPGECEM (UEPB), entre 2015-2017, orientada pela segunda co-autora e desenvolvida a partir do trabalho da equipe *Provas e Demonstrações Matemáticas*, núcleo UEPB do Projeto em Rede OBEDUC/CAPES com as instituições Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL), sendo o Núcleo UEPB coordenado pela primeira co-autora, que teve como objetivo investigar os tipos de provas matemáticas e o pensamento geométrico de alunos do 1º Ano do Ensino Médio a partir da aplicação de uma *Proposta Didática*.

Escolhemos o tema *Provas e Demonstrações* por percebemos, diante da revisão da literatura, que há uma lacuna sobre este tema nas aulas de Matemática na Educação Básica como mencionam Almouloud (2007) e Nasser e Tinoco (2003). Por já pesquisas feitas por nossa equipe, identificamos que os alunos não foram capazes de explicar, definir ou argumentar matematicamente os métodos utilizados para resolver as atividades que envolviam Triângulos (SANTOS, 2014).

Inúmeros professores de Matemática em seus processos de ensino preferem levar os alunos a aprender um determinado assunto por meio da memorização das definições, propriedades e teoremas sem o devido esclarecimento conceitual, experiência essa que compromete a análise da matemática como área investigativa eliminando assim a chance do aluno de pensar matematicamente (ALMOULOUD, 2000, p. 3). Não diferente acontece com o ensino de Geometria quando se é ensinado.

Dreyfus (1991) traz em sua pesquisa que um dos objetivos fundamentais dos professores de Matemática sempre foi o do entendimento, ao invés de saber ou está apto a fazer algo. Pois, para ele entender é uma ação continuada que acontece na mente do aluno e pode ser até um *insight*, mas geralmente é fundamentado numa sequência de atividades de aprendizagem em que ocorre a integração de diversos processos mentais.

Andrade e Saraiva (2008) encontram estudos, como por exemplo, o de Razel e Eylon (1990), que apontam que alunos do Ensino Básico que tiveram possibilidade de trabalhar matemática com materiais didáticos visuais desenvolveram uma capacidade para identificar conceitos visuais em contextos complexos, bem como aplicar estes conceitos em situações visualmente complexas. Eles mostram ainda a importância do treino visual como um antecedente para a aprendizagem da geometria e para a transição para um pensamento mais abstrato e dedutivo na Educação Básica. Deste modo, é urgente dar ao raciocínio visual um estatuto e uma atenção de acordo com a sua importância educacional e matemática (ANDRADE e SARAIVA, 2008, p.6)

No modelo de ensino tradicional da Geometria em que a maior parte dos professores e autores de livros didáticos apresentam aos alunos tudo pronto para que eles simplesmente reproduzam em provas e testes é fortemente alvo de críticas dos educadores matemáticos e até por matemáticos como (FREUDENTHAL,1973).

Na busca do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, o casal Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Marie Van Hiele, em suas respectivas teses de doutorado, na Universidade de Utrecht, Holanda em 1957, deram origem ao Modelo de Van Hiele. A tese de Dina Van Hiele-Geldof tratava-se de um experimento educacional a respeito da ordenação do conteúdo de Geometria e atividades de aprendizado dos alunos; já na tese de Pierre Van Hiele o foco era explicar o porquê os alunos tinham problemas ao aprender Geometria. Como Dina faleceu logo após o término da tese de doutorado, foi Pierre que esclareceu sobre os níveis, fases e propriedades do Modelo de Van Hiele (SILVA e CANDIDO, 2014).

A principal característica do Modelo de Van Hiele é a diferença entre cinco diferentes níveis de pensamento com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca da Geometria (DE VILLIERS, 2010):

> Nível 1: *Reconhecimento*
> Os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente.
> Nível 2: *Análise*
> Os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades das mesmas.
> Nível 3: *Dedução Informal*
> Os alunos realizam a ordenação lógica das propriedades de figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre as figuras (por exemplo, inclusões de classe)
> Nível 4: *Dedução*
> Os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas.
> Nível 5: *Rigor*
> Neste estágio, o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, podem-se estudar Geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. A Geometria é vista no plano abstrato. (DE VILLIERS, 2010, p. 2)

Este quinto nível não é muito utilizado pelos pesquisadores que utilizam o Modelo de Van Hiele. Até Pierre M. Van Hiele se interessava apenas pelos três primeiros níveis, pois justificava que a teoria foi desenvolvida no Ensino Básico (HOFFER, 1981).

Em De Villiers (2010) encontramos que os Van Hiele consideraram como um erro do currículo de Geometria tradicional apresentar o ensino em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, eles não conseguiam aprender pois os professores não levavam em conta o nível de aprendizado em que eles se encontravam para daí poder ensinarem de uma maneira que os alunos entendessem o professor.

A principal razão em utilizarmos em nossa pesquisa o Modelo de Van Hiele para analisar as justificativas dadas pelos alunos nas atividades de nossa Proposta Didática é a possibilidade que este modelo proporciona em classificar o pensamento geométrico de alunos com justificativas tanto formais como informais, contribuindo para o entendimento das dificuldades encontradas pelos alunos diante das atividades propostas. A partir do diagnóstico do nível em que o aluno se encontra no modelo de Van Hiele estratégias podem ser tomadas para os alunos progredirem diante de uma sequência de níveis de interpretações dos conceitos, assim as evoluções de um nível para outro deverão ocorrer, por intermédio de um desenvolvimento planejado de atividades, uma vez que a ascensão dos níveis de compreensão geométrica depende, mais especificamente, de uma aprendizagem adequada à experiência do aluno.

2.METODOLOGIA

Em nossa pesquisa utilizamos Yin (2015) como referência para o estudo de caso, Marconi e Lakatos (2011) e Bogdan e Biklen (2013) como fundamentação teórica para realização da coleta dos dados com métodos qualitativos. Isto é, elaborou-se uma *Proposta Didática* composta por treze questões divididas em três partes. A primeira parte composta de oito questões abordando o Teorema de Pitágoras, a segunda de três questões abordando o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo qualquer, e a terceira de duas questões envolvendo o Teorema do Ângulo Externo de um triângulo qualquer. Para esse artigo utilizaremos a Atividades 3 da segunda parte da *Proposta Didática*.

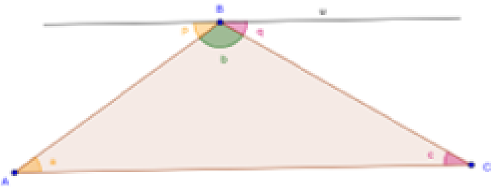
A *Proposta Didática* foi aplicada no dia 17 de junho de 2015 em uma Escola Pública Estadual da cidade de Areia, Paraíba, em uma turma do 1º Ano do Ensino Médio da Educação Básica, com 19 alunos divididos em oito duplas e um trio.

Para nossa análise escolhemos a dupla que obteve melhor desempenho na *Proposta Didática*. No estudo de caso de Aline e Tamara procuramos neste artigo analisar o nível do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo de Van Hiele identificado na *Proposta Didática* realizada pela dupla. A seguir apresentamos a terceira atividade da segunda parte da *Proposta Didática.*

2.1 Atividade 3, Parte II,

Figura1: Atividade 3 (Parte II)

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

____

____

____

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

____

____

____

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) $p + b + q = 180°$

( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

( ) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

( ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Fonte: Proposta Didática

Objetivos:

a) Que os alunos identifiquem visualmente os elementos geométricos pedidos no triângulo;
b) Que os alunos identifiquem alguma propriedade no triângulo;

c) Que os alunos consigam colocar na ordem correta os passos da demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo
d) Que os alunos consigam demonstrar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo de maneira diferente da proposta anteriormente.

3.RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para análise dos dados obtidos em nossa *Proposta Didática* classificamos as respostas dadas pela dupla em um dos níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo de Van Hiele.

3.1 Atividade 3 (Parte II)

Resultados Esperados:

Que a dupla de alunas consiga provar ou demonstrar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo:

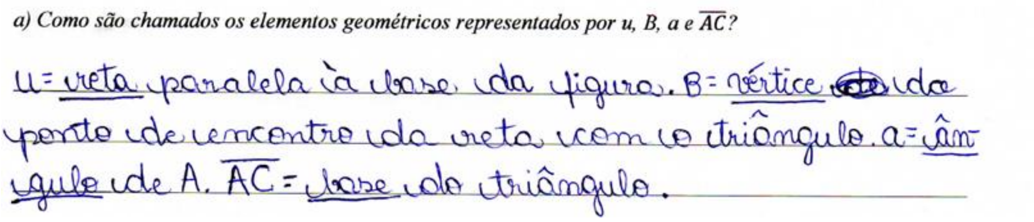
- Item a: Que a dupla consiga nomear os elementos geométricos propostos
- Item b: Que a dupla consiga identificar alguma propriedade presente no triângulo proposto.
- Item c: Que a dupla consiga colocar na sequência correta as frases a fim de obter a demonstração do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo.
- Item d: Que a dupla demonstre de uma maneira diferente o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Neste item os alunos estão livres para demonstrar da maneira que pensarem correto.

Resultados Obtidos:

A seguir apresentamos em quatro subseções as respostas dadas pela dupla de alunas aos itens da atividade 3 (Parte II):

3.1.1 Atividade 3 , (Parte II) item (a)

Figura 2: Resposta do item *a* da Atividade 3 (Parte II)


a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

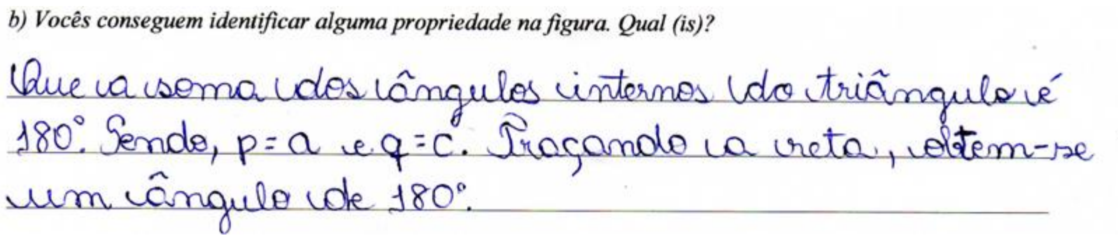
u= reta paralela à base da figura. B= vértice do ponto de encontro da reta com o triângulo. a= ângulo de A. $\overline{AC}$= base do triângulo.

Fonte Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

A dupla Aline e Tamara, pelo exposto acima, conseguiu nomear corretamente todos os elementos geométricos propostos no item. Assim, ao conseguir reconhecer visualmente elementos geométricos sem a necessidade de explicar suas propriedades ou definições podemos classificarmos a dupla no Nível 1: *Reconhecimento*, segundo o modelo de Van Hiele.

3.1.2 Atividade 3, (Parte II) item (b)

Figura 3: Resposta do item *b* da Atividade 3 (Parte II)


b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

Que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°. Sendo, p=a e q=c. Traçando a reta, obtem-se um ângulo de 180°.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

Neste item, Aline e Tamara conseguiram identificar uma propriedade do triângulo, a soma dos ângulos interno de um triângulo mede 180°. O leitor atento pode se perguntar, mas o enunciado já induz ao aluno responder isso? Essa Proposta Didática foi aplicada para oito duplas e um trio de alunos e apenas essa dupla conseguiu responder a este item, mostrando que a dupla antes de tudo leu e entendeu o enunciado da atividade. A leitura e interpretação do enunciado é considerado como primeiro passo para o êxito na resolução de qualquer atividade. No entanto, o diálogo transcrito da dupla evidência que Aline também não percebeu essa dica do enunciado, mas lembrou de ter visto algo a respeito desta propriedade

Tempo Parte 2	Personagem	Fala
00:23:10	**Aline**	**Leu o item (b)**
00:23:15	**Aline**	**Que propriedade?**
00:23:30	**Aline**	**Ah! é aquela lá que passa a reta e dá 180º e p é igual a e q é igual a c**
00:23:55	**Aline**	**Que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, sendo p é igual a e q é igual a c**
00:24:40	**Aline**	**Traçando a reta, obtém-se um ângulo de 180º**

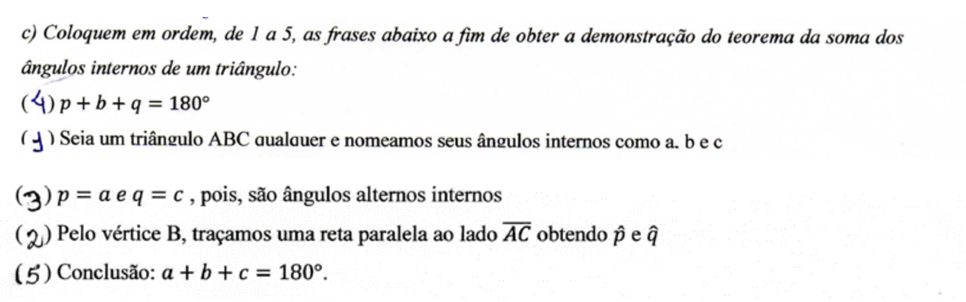
Fonte: Transcrição do Dialogo da Dupla Aline e Tamara

Quando Aline enfatiza "*Ah! é aquela lá que passa a reta e dá 180º e p é igual a e q é igual a c"* parece-nos claro que o enunciado não foi decisivo em sua resposta, mas sim no fato dessa propriedade estar relacionada com algo no triângulo, o qual vai de encontro com o propósito da atividade. Outro ponto que podemos analisar a respeito deste resultado proposto pela dupla é que ao tentar justificar a escolha desta propriedade a dupla deixa lacunas em suas respostas que comprometem sua explicação. No entanto, para Van Hiele, no Nível 2 o aluno apenas precisa identificar a existência da relação da propriedade com a figura, não sendo necessário para esse nível a sua explicação formal.

Diante disso, a dupla compreendeu que essa demonstração trabalhada na atividade é uma propriedade do triângulo. Assim, por conseguirem identificar, ou lembrar essa propriedade na figura, a dupla pôde ser classificada no Nível 2 do Modelo de Van Hiele: *Análise*.

3.1.3 Atividade 3, (Parte II) item (c)

Figura 4: Resposta do item *c* da Atividade 3 (Parte II)


c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

(4) $p + b + q = 180°$

(1) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

(3) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

(2) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

(5) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

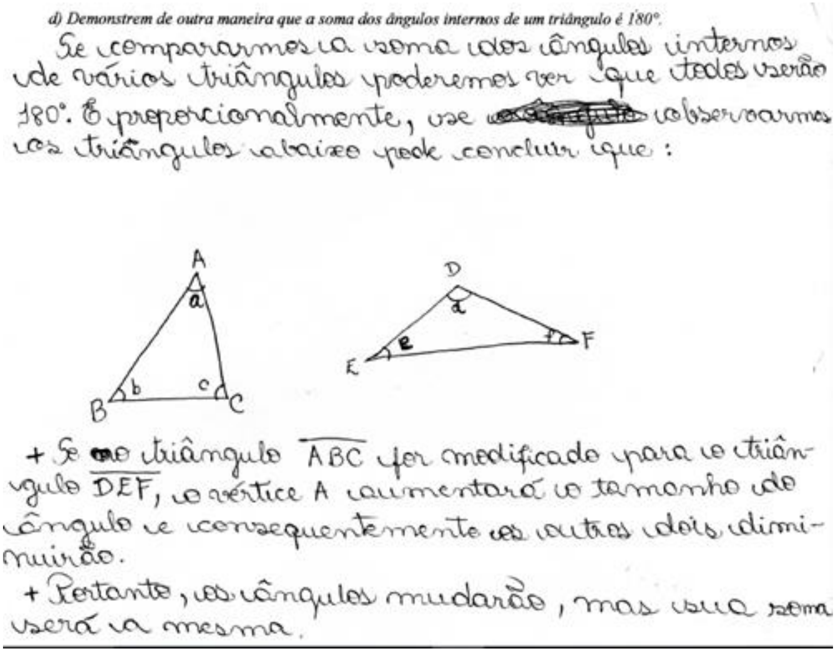
A dupla conseguiu obter uma sequência correta que demonstra o teorema proposto, pois elas realizaram uma ordenação lógica das frases que demonstra o teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. O diálogo da dupla apresentado na transcrição mostra o empenho das duas alunas em ordenar corretamente a sequência proposta (Apêndice 3):

Tempo:Parte2	**Personagem**	**Fala**
00:25:20	**Aline**	**Leu o item (c)**
00:25:30	**Aline**	**A conclusão é o último**
00:25:35	**Aline**	**O primeiro é esse aqui: Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c**
00:25:49	**Aline**	**Aí o dois é pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado AC obtendo p e q**
00:26:14	**Tamara**	**Esse aqui é o quatro?**
00:26:18	**Aline**	**E esse outro aqui é o cinco**
00:26:27	**Aline**	**Quem é o 3 e quem é o 4?**
00:26:33	**Aline**	**p igual a e q igual a c, pois, são ângulos alternos internos, acho que esse é o quatro**
00:26:41	**Tamara**	**Acho que esse também é o quatro**
00:26:41	**Aline**	**Primeiro tem descobrir quem é p e q**
00:26:49	**Aline**	**E depois é que diz essa conclusão**
00:26:51	**Aline**	**O que falta é o 3**

Essa habilidade das alunas realizarem a ordenação lógica das frases por meio de curtas sequências de dedução é classificada por Van Hiele no Nível 3: *Dedução Informal*

3.1.4 Atividade 3, (Parte II) item (d)

Figura 5: Resposta do item d da Atividade 3 (Parte II)


d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Se compararmos a soma dos ângulos internos de vários triângulos poderemos ver que todos serão 180°. E proporcionalmente, se observarmos os triângulos abaixo pode concluir que:

+ Se o triângulo $\overline{ABC}$ for modificado para o triângulo $\overline{DEF}$, o vértice A aumentará o tamanho do ângulo e consequentemente os outros dois diminuirão.

+ Portanto, os ângulos mudarão, mas sua soma será a mesma.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

Percebemos que a dupla ao demonstrar que a Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo é 180° mostra que há um padrão ao medir os ângulos de um triângulo e depois somá-los. Utilizaram figuras para ilustrar essa situação e concluíram que vale para todos os triângulos. Essa dedução feita pela dupla aponta o Nível 3 de Van Hiele: *Dedução Informal*, pois a dupla utilizou a verificação de alguns casos particulares para validar sua dedução.

4.CONCLUSÕES

Neste artigo tivemos o objetivo de classificar a dupla Aline e Tamara em um dos níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o Modelo de Van Hiele. Para tanto, escolhemos a **Atividade 3 (Parte II)** da Proposta Didática. Com relação à classificação em um dos níveis do modelo de Van Hiele obtemos:

No item (a) desta atividade a dupla conseguiu nomear os elementos geométricos propostos, podendo ser classificada no Nível 1: *Reconhecimento*, do Modelo de Van Hiele.

No item (b) Aline e Tamara conseguiram identificar uma propriedade do triângulo. Por isso, puderam ser classificadas no Nível 2: *Análise*, segundo o Modelo de Van Hiele

No item (c) Aline e Tamara apresentaram uma sequência lógica que demonstra o Teorema da Soma dos Ângulos Interno de um

Triângulo. Diante disso, pôde ser classificada no Nível 3 do Modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*.

No item (d) a dupla Aline e Tamara tentou demonstrar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo por meio da análise de alguns casos particulares e concluindo que esse Teorema vale para todos os triângulos. Sendo assim, a dupla ao utilizar uma justificativa informal pôde ser classificada no Nível 3 do Modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*.

Percebemos ao final de nossa análise que a dupla Aline e Tamara teve grande vontade para obter soluções corretas em nossa Proposta Didática por meio das justificativas nas atividades propostas. Entretanto, não apresentou conhecimento sobre provas intelectuais ou deduções formais, limitando sua classificação ao terceiro nível do Modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*. Assim, podemos afirmar que a dupla utiliza de meios empiricos para fundamentar suas justificativas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S., MELLO, E. G. S. **Iniciação à Demonstração Apreendendo conceitos geométricos**. Caxambu, 2000. In: 23ª Reunião Anual da ANPED, anais... Caxambu.

ALMOULOUD, S. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem**. Grupo de Educação Matemática GT 19, 2007.

ANDRADE e SARAIVA. **Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática**. Número 96, páginas 2-6, Fevereiro 2008.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos**. Porto Editora, p. 336, 2013.

DE VILLIERS, M. **Algumas reflexões sobre a teoria de Van Hiele**, p. 32, v. 12, nº 3, 2010.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Process. p. 25-41,1991. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**, Dordrecht-Boston-Lodon: Kluwer Academic Publishers.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: D. Reidel, 1973.

HOFFER, A. **Geometry is More Than Proof**. Mathematics Teacher, 74 (January), p. 11-18, 1981.

NASSER, L e TINOCO, L.A. **Argumentação e provas no ensino da matemática**. 2ª ed. Rio de Janeiro, 2003. UFRJ/Projeto Fundão.

RAZEL e EYLON. **Development of visual cognition: Transfer effects of the Agam program**. Journal of Applied Developmental Psychology, 11,459-484, 1990.

SANTOS, M. C., et al. **Conhecimentos matemáticos: até que ponto os alunos do último ano da educação básica conseguem argumentar sobre triângulos?** 2014b. In: VIII Encontro Paraibano de Educação Matemática – EPBEM, 27 a 29 de Novembro de 2014, Campina Grande – PB.

SILVA, L. & CANDIDO, C. C. **Modelo de aprendizagem de Geometria do casal Van Hiele, 2014.**

MARCONI, M. A. & LAKATOS, E. M. **Metodologia Científica**, Editora Altlas, 6ª ed., p. 314, 2011.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 5ª ed. Porto Alegre: Brookman, p. 320, 2015.