OBSTÁCULOS IDENTIFICADOS PARA O ENTENDIMENTO DE LIMITE – UMA REVISÃO DA LITERATURA

Alexandre Souza de Oliveira

(*Pontifícia Universidade Católica de São Paulo- PUC-SP)*

Introdução

Em pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do cálculo temos encontrado a evidência de diversas dificuldades que os alunos têm em compreender os conceitos básicos subjacentes ao Cálculo (Bagni, 2005; Bezuidenhout, 2001, Cornu, 1991, Orton, 1983; Tall, 1996). Uma dificuldade especial parece estar relacionada com o conceito de limite matemático. A este respeito, seja como base conceitual para a aprendizagem do cálculo ou como ponte entre o raciocínio concreto matemático e o pensamento abstrato matemático dos alunos, entendemos que o conceito de limite é um desafio para muitos alunos (Bagni, 2005; Burn, 2005; Cornu, 1991; Güçler, 2013; Juter, 2006a; Odafe, 2012; Swinyard 2011, alto, 1991, Tall, 2009). Um dos principais problemas reside na diferença entre as concepções intuitivas de limite dos alunos e sua definição formal (Bagni, 2005; Burn, 2005; Cornu, 1991; Cottrill et al, 1996. Güçler, 2013; Juter, 2006a; Moru de 2008; alto & Vinner, 1981; Williams, 1991). De fato, a abordagem da intuição evidencia um obstáculo com a definição. Este obstáculo é qualquer coisa que dificulta a aprendizagem dos alunos (Moru, 2007), nossa leitura da literatura tem três formas de obstáculo identificado, ligados à normalmente as dificuldades dos estudantes para acomodar as novas ideias (Tall, 1991). Eles podem ser de uma ***natureza epistemológica***, devido a razões internas da própria matemática (Brousseau, 1997; Sierpinska, 1987); ***natureza cognitiva***, devido aos processos de abstração e conceituação envolvidos (Cornu, 1991, Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Alto & Vinner, 1981) e de ***natureza didática***, devido à natureza de ensino e aprendizagem (Brousseau, 1997). A seguir, resumimos o que a literatura tem a dizer sobre a natureza e fontes destes obstáculos ao ensino e aprendizagem do conceito de limite.

Obstáculos Epistemológicos

Obstáculos epistemológicos, como consequência característica de natureza do próprio conceito de limite (Herscovics, 1989). A este respeito, Sierpinska (1990) escreve sobre a conscientização destes obstáculos;

> O momento em que descobrimos que há algo errado com este conhecimento (ou seja, a conscientização de um obstáculo epistemológico), compreendemos e

> agimos, iniciando um novo saber. Esta nova maneira de saber, por sua vez, pode começar como um obstáculo epistemológico ocasionada por uma outra situação. (SIERPINSKA, 1990, p. 28, tradução nossa)

Em termos gerais, três fontes principais de obstáculos epistemológicos do ensino e da aprendizagem de limite foram identificadas. Estes estão relacionados com o desenvolvimento histórico e formalização do conceito de limite, a natureza dos conceitos utilizados na sua formalização, e a natureza dual do conceito implícito no símbolo limite (Bagni de 2005, Cornu, 1991; Güçler, 2014; Sierpinska, 1987).

Desenvolvimento histórico e formalização do conceito de limite

Estudando a história do desenvolvimento de um conceito matemático pode indicar a presença de obstáculos epistemológicos (Cornu, 1991). Historicamente, o conceito de limite desenvolvido a partir da necessidade, por exemplo, de cálculos de área para resolver antes da introdução do teorema fundamental do cálculo. Seu desenvolvimento levou matemáticos primeiros a lidar com quatro principais obstáculos epistemológicos; falha de conexão noções geométricas e numéricas do conceito, a noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno, o aspecto metafísico da noção de limite e lidar com o inatingível física do próprio limite (Cornu, 1991). Esta questão tem irritado muitos professores de matemática, destacando que no desenvolvimento do conceito de limite os alunos têm encontrado dificuldades repetidamente na aprendizagem do conceito de limite (Juter, 2006a; Juter, 2006b). Os erros dos alunos aparecem geralmente quando os mesmos resolvem problemas conceituais que acabam evidenciando obstáculos epistemológicos (Cornu, 1991). Por exemplo, na investigação dos obstáculos epistemológicos encontradas pelos alunos de graduação, Moru (2008) encontrou excesso de generalização e a tomada do limite como o valor da função.

A natureza dos conceitos utilizados na formalização do conceito de limite

As principais fontes de obstáculos epistemológicos não são apenas relacionadas com o conceito em si, mas também limitar a conceitos que sustentam o desenvolvimento e formalização do conceito. Um dos conceitos importantes para a conceituação de limite é o conceito de função, que apresenta conceito conceptual como dificuldades de limite e, portanto, é problemático para os alunos (Pettersson, 2012). Além disso, Szydlink (2000) mostrou sobre as crenças que os estudantes têm em relação ao infinito, funções e números reais no qual pode criar também barreiras na compreensão dos limites. Estes conceitos têm dupla natureza (Sfard, 1991). Assim sendo, estes obstáculos são duplamente refletidos nos conceitos identificados. Com relação ao infinito, um ponto de discussão entre os matemáticos anteriores e ainda um desafio para os estudantes (Juter, 2006b), obstáculos heurísticos são refletidos duplamente na distinção entre se o infinito pode existir (obstáculo heurística - estática) ou é simplesmente um processo (obstáculo heurística-cinética). Além disso, a extensão ao infinito que foi domesticado e seu aspecto metafísico para o grande obstáculo reflete eliminado. Com relação às funções, uma visão de funções como conjuntos de valores cria obstáculos heurísticos, para funcionar como a visualização considerando uma expressão analítica alude a um obstáculo rigoroso (Sierpinska, 1987). Uma terceira fonte de obstáculo epistemológico podem ser encontrados em relação aos números reais, onde incapacidade de compreender as suas propriedades heurísticas subjacentes criam obstáculos.

A dual natureza do conceito de limite implícito no símbolo

Os símbolos matemáticos em aritmética, álgebra e cálculo tem uma natureza dupla, assim como o símbolo usado para representar o limite (Gray & Tall, 1994; Alto, 2000), o que cria obstáculos de aprendizagem para os alunos. A representação simbólica do limite, lim x → f (x), implica num processo que nunca termina que, potencialmente, um processo de 'tendendo', 'chegando perto', 'tão próximo' bem como um objeto em si (Gray & Tall, 1994). O primeiro é geralmente representado por palavras que significam movimento, e centra-se sobre o comportamento da função perto do ponto de interesse. Este último, Considerado como um objeto matemático, concentra-se na conclusão do processo, uma quantidade estática ou um objeto matemático, que pode ser usado para outros fins. Esta mudança de interpretar o limite evidencia uma dinâmica de obstáculos estáticos criados para a aprendizagem.

Obstáculos Cognitivos

Que os obstáculos cognitivos são obstáculos são encontrados no processo de aquisição de novos conhecimentos. Baseando-se em Herscovics (1989), Mallet (2013) escreve que um obstáculo cognitivo é "uma situação onde uma estrutura mental existente é apropriado para um domínio, mas causa dificuldades na aprendizagem em outro domínio devido à incompatibilidade com a nova situação ou conceitos" p. 152 (tradução nossa). Assim, quando os estudantes se encontram novos conhecimentos, o conhecimento prévio sua pode não ser compatível com o novo,

Resultando em conflito cognitivo entre os dois (Tall & Vinner, 1981; Alto, 1991). Muitos destes obstáculos cognitivos surgir como consequência do processo de abstração envolvidos na formalização do conceito. Por exemplo, estudos têm diferenças entre a definição formal do conceito de limite e a imagem que os alunos usar em sua mente quando se trabalha com ele, RESULTANTE frequentes em uma incompatibilidade entre imagem do conceito do indivíduo e sua definição formal identificados (Parameswaran, 2007; Tall & Vinner, 1981). O mais abstrato do conceito, a experiência Dificuldades mais conceitual e os alunos são menos capazes de coordenar Eles Seu conceito Com as imagens de definição de conceito, semeando as sementes de futuros obstáculos cognitivos (Tall & Schwarzenberger, 1978). Além disso, como discutido acima, quando se apresenta com a representação simbólica do limite, os estudantes encontram frequentes distinguir entre o processo de encontrar o limite e o valor associado (Kidron, 2008). Ou seja, a incapacidade de ver semelhanças e diferenças entre os dois provocam obstáculos cognitivos. Em termos globais, os estudantes tendem a passar por um processo dinâmico de visualização de um objeto, mas não uma visão estática do limite, consequência de que eles não podem ver a interação entre os dois (Bagni, 2005; Parameswaran, 2007; Williams, 1991).

Obstáculos Didáticos

Surgem obstáculos didáticos, como consequência da natureza de ensino e aprendizagem; as maneiras o conceito é apresentado em livros didáticos, o sequenciamento de conceitos associados e instrucional tomada de decisão dos professores. Além disso, devido às tentativas dos intervenientes para abordar obstáculos epistemológicos e cognitivos, os obstáculos didáticos tendem a contribuir para a sua circulação criação maneira (Robert & Speer, 2001). Por exemplo, alguns livros didáticos introduzir o conceito graficamente, alguns verbalmente e intuitiva, e alguns algebricamente. Estas diferentes formas de privilégio diferentes abordagens que podem ou conhecimento não poderá mais tarde ser compatível com formalizações e definições. Por exemplo, alguns livros didáticos de cálculo apresentar primeiras tabelas de valores que são representados graficamente. Então, o conceito de limite para introduzir de forma intuitiva. Um exemplo particularmente encontrado em muitos livros didáticos é o fornecimento de uma tabela de valores onde os alunos devem aproximar valores pequenos, o que incentiva os alunos a acreditar, não só o limite que é um processo de aproximação, mas pequenas quantidades também que pode ser ignorado (Parameswaran, 2007). Na verdade, ensinando que processual enfatiza ao invés de aspectos conceituais de limites pode resultar em entendimentos do conceito como procedimentos isolados (Bezuidenhout, 2001), os problemas que podem ser atenuadas através do ensino que enfatiza as conexões entre geométrica, numérica, algébrica e representações verbais dos alunos do limite (Stewart, 2008). Assim, o que Cornu (1991) descreveu como a falha dos estudantes não pode ser atribuída apenas para estudantes, mas também para professores, livros e currículos. Por exemplo, falhas de professores para ajudar os alunos para vincular o conceito de limitar seu desenvolvimento histórico pode ser considerado como uma fonte de descontinuidade, um obstáculo potencial didático, entre matemática elementar e avançado. Além disso, enquanto os estudantes tendem a adotar o discurso relacionado com o limite dos seus professores, seus usos das mesmas características discursivas tendem a fundamentar uma narrativa de limite como um processo em vez de objeto limite como um processo e não como limite de objeto, o que implica uma provável falta de comunicação quanto ao discurso sobre limites.

Um exemplo de obstáculo epistemológico

Embora a pesquisa esteja ainda no âmbito inicial, discutiremos alguns resultados encontrados a princípio na análise de 1 de 5 questões teóricas aplicadas a estudantes do 2º semestre de Licenciatura em Matemática de uma determinada Universidade particular do Estado de São Paulo explicasse o que significa dizer: dada uma função f , o limite $f(x)$, quando x tende para um número a, é igual a L. Observamos que nenhum estudante, dos 22 investigados deixou de responder, porém, todos apresentaram definições informais em que o limite se aproxima de um valor ou tende a um valor, sem alcança-lo. Tomemos a exemplo a resposta do estudante A10, logo abaixo.

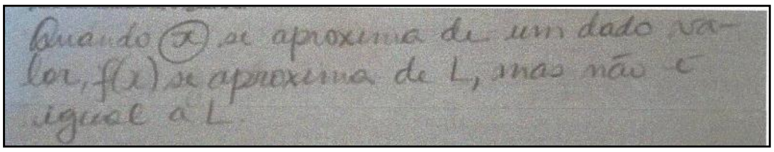
Quando x se aproxima de um dado valor, f(x) se aproxima de L, mas não é igual a L.

Fig. 01- A10

Embora não colocamos neste artigo todas os questionamentos aos alunos, podemos considerar que os principais problemas destacados foram: à noção intuitiva do conceito e a dificuldade de trabalhar com questões que não envolviam procedimentos, os pontos de não continuidade. Estudar conteúdos abstratos da Matemática já é um trabalho árduo para muitos estudantes e quando esses conteúdos não fazem sentido, conceitualmente falando, as dificuldades se agravam. Há um grande desajuste entre executar o cálculo do limite e entender seu significado (CORNU, 1991), especificamente quando se trata de expressões “tender a” e “ter limite”. Realizar corretamente o cálculo do limite de uma função não garante a aprendizagem do mesmo e os resultados da pesquisa nos mostram a importância de se trabalhar com problemas conceituais, para acompanhar a aprendizagem do estudante. É importante salientar que ainda estamos em fase inicial de pesquisa e temos ainda muito o que percorrer.

Referências

Bagni, G. (2005). *The historical roots of the limit notion: Cognitive development and the development of representation registers*. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5(4), 453-468. doi:10.1080/14926150509556675

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). *Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in spanish high schools. Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 235-268.

Bezuidenhout, J. (2001). *Limits and continuity: Some conceptions of first-year students.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32(4), 487-500.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer academic publisher. Burn, B. (2005). Some historically inspired and proof generated steps to limit of sequences. Educational Studies in Mathematics, 60(3), 269-295.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). *Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme.* The Journal of Mathematical Behavior, 15(2), 167-192. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 95-126).

Dordrecht: Kluwer academic publishers. Fernández-Plaza, J. A., Rico, L., & Ruiz-Hidalgo, J. (2013). *Concept of finite limit of a function at a point: Meanings and specific terms.* International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 44(5), 699-710. doi:10.1080/0020739X.2013.805887

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). *Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic*. Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), 116-140. doi:10.2307/749505

Güçler, B. (2013). *Examining the discourse on the limit concept in a beginning level calculus classroom. Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 439-453.

Güçler, B. (2014). *The role of symbols in mathematical communication: The case of limit notation.* Research in Mathematics Education, 16(3), 251-268. doi:10.1080/14794802.2014.919872

Hardy, N. (2009). *Students' perceptions of institutional practices: The case of limits of functions in college level calculus courses.* Educational Studies in Mathematics, 72(3), 341-358. doi:10.1007/s10649-009-9199-8