

FRAÇÕES, OPERAÇÕES COM FRAÇÕES E PROPORCIONALIDADE: UM ESTUDO À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Ewerton Ricardo Laurentino Gomes da Silva

Universidade Federal de Pernambuco- ewertton-ricardo@hotmail.com

Resumo: Neste artigo abordaremos as convergências e os distanciamentos entre o que os documentos oficiais preconizam, o que o professor espera dos alunos e o que é realmente feito pelos alunos, à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Tomaremos como instituição I o Ensino Médio em Pernambuco, como objetos de saber, as frações; as operações com frações e a proporcionalidade. Desta forma, tendo por base os documentos oficiais, os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PCPE), a Base Curricular Comum para as redes públicas de ensino de Pernambuco (BCC-PE) e um problema aplicado a 35 alunos e 1 professor de uma turma do 1º Ano do Ensino Médio, mostraremos a relação Institucional RI (O) desses sujeitos, no que concerne as suas respectivas posições (aluno/professor), quanto aos objetos acima supracitados. Os dados coletados evidenciam convergências entre as orientações curriculares, as expectativas do professor e os conhecimentos mobilizados pelos alunos, no que se refere a proporcionalidade e a equivalência de frações. Porém, há distanciamentos quanto à utilização da divisão de frações. Por querer entender até que ponto as relações institucionais com o objeto de saber impelem as tomadas de decisões dos sujeitos da instituição, a escolha da TAD como quadro teórico se fez pertinente. Nosso objetivo, com este artigo, é verificar e analisar até que ponto esses dispositivos sociais permitem e impõem à Instituição Ensino Médio, em Pernambuco, maneiras próprias de fazer e de pensar, no que se refere aos objetos de saber: fração, operações com frações e proporcionalidade.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático, Relação Institucional, Fração, Proporcionalidade.

INTRODUÇÃO

Espera-se que o ensino de frações no Brasil se inicie no 2º ciclo do Ensino Fundamental (4º e 5º anos), segundo os PCN e a BCC-PE. Muitas das dificuldades apresentadas no Ensino da Matemática estão relacionadas com o Ensino dos números racionais, que se justifica pelo fato de grande parte da conceituação de números racionais acontecer num período significativo de reorganização cognitiva, isto é, numa transição do pensamento concreto para o pensamento formal; além, do fato desse objeto matemático envolver um conjunto rico de subconstrutos integrados, relacionando processos de um vasto campo conceitual. (Behr, Lesh, Post e Silver, 1983, p.91-92). O que justifica o desenvolvimento deste artigo, pois além das dificuldades encontradas pelos alunos quanto a esse objeto de saber, foi constatado por meio de uma revisão da literatura apenas um artigo sobre as Relações Institucionais com os objetos frações, operações com frações e proporcionalidade na Instituição Ensino Fundamental em Pernambuco à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Desta forma, temos uma grande questão a ser respondida neste trabalho: Quais as convergências e os distanciamentos entre o que os documentos oficiais preconizam, o que o professor espera dos alunos e o que é realmente feito pelos alunos, à luz da TAD?

O percurso que cumpre o objeto de saber desde a sua produção científica, até a sua inserção no universo da sala de aula é grande e, neste sentido;

Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (Chevallard, 1991, p.39).

A TAD nos fornece condições para percebermos que existem algumas transformações que um objeto de saber leva desde a sua produção até chegar efetivamente aos alunos. Chevallard (1991) faz referência a esses saberes, como o *saber científico*, que é o saber produzido em uma instituição cuja função é produzir conhecimentos; *saber a ensinar* nesse nível são produzidos textos (programas oficiais) que definem o conhecimento que deve ser ensinado em cada nível de escolaridade, que junto com o saber aprontado formam a noosfera. Podemos ver a noosfera como uma esfera onde pensamos o funcionamento didático fazem parte os representantes do poder político e especialistas das disciplinas, e seu papel é propor saberes a serem ensinados, sem levar em consideração os métodos pedagógicos utilizados; *saber ensinado* é nesse nível que o professor intervém, organizando suas sequências de ensino (planos de aula). E por fim o saber aprendido que também fora mencionado por Chevallard, Bosch e Gascón, 2001, que corresponde aos saberes que os alunos conseguiram assimilar.

Os PCPE e a BCC-PE, a saber, são documentos produzidos pela noosfera que nos mostra a relação institucional com os objetos de saber. Disto, a instituição que consideraremos o Ensino Médio em Pernambuco e os objetos frações, operações com frações e proporcionalidade, estudados a partir de um problema matemático específico, formam uma relação e é norteada pelo que é preconizado nos documentos acima supracitados. Neste sentido, os PCPE e a BCC-PE podem ser considerados como dispositivos sociais que permitem e impõem a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar.

Nosso objetivo, com este artigo, é verificar e analisar até que ponto esses dispositivos sociais permitem e impõem à Instituição Ensino Médio, em Pernambuco, maneiras próprias

de fazer e de pensar, no que se refere aos objetos de saber: fração, operações com frações e proporcionalidade.

O saber ensinado é necessariamente diferente do saber inicialmente designado como saber a ensinar (Arsac et al., 1989). Daí, se faz necessário um melhor entendimento das imposições que pesam sobre as instituições e a seus sujeitos. Para isto, a adoção da TAD se faz bastante pertinente, pois ela disponibiliza instrumentos que permitem interpretar as orientações curriculares, as expectativas do professor e a atividade matemática dos alunos, a partir da instituição e do saber em questão.

1 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Na TAD, Chevallard (1996, p. 127) propõe inicialmente três conceitos primitivos: os objetos (O), as pessoas X, as instituições I. Chevallard (1996) chama atenção para os objetos O, por ser necessária e fundamental para a base teórica. Logo considera, “todas as coisas são objetos”, as pessoas X e as instituições I também são objetos. O conhecimento entra em cena na TAD com a ideia de relação. Um objeto O existe se existe uma relação com este objeto, ou seja, se um indivíduo ou uma instituição o "(re)conhece" como objeto. É a partir dessas práticas que se define a relação institucional a O em I ou RI(O).

O conceito de pessoa, definida na TAD como sendo o par formado por um indivíduo X e pelo sistema de suas relações pessoais com os objetos (O), representada por $R(X, O)$, em determinados momentos da história de X. A definição de pessoa proposta por Chevallard, não se deve generalizar o fato de que “todo indivíduo é uma pessoa”. Para ele, a pessoa muda com o passar do tempo, dependendo da mudança e da evolução de suas relações pessoais com os objetos, mas o indivíduo permanece invariante.

Chevallard vai nos dizer que uma instituição é "um dispositivo social 'total' que certamente pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite – e impõe – a seus sujeitos (...) maneiras próprias de fazer e de pensar". Ainda, segundo Chevallard (1996, pg. 129) “... a instituição pode ser quase tudo o que quer que seja”. Uma escola é uma instituição, tal como o é uma sala de aula.

Qual o sentido é atribuído ao termo saber na TAD?

Cada saber S é vinculado a pelo menos uma instituição na qual é posto em jogo em relação a um domínio de realidade D. O ponto essencial é considerar que um saber não existe em uma vacuidade social: cada saber aparece em uma determinada

sociedade, como ancorado em uma ou várias instituições. (Chevallard, 1991).

Ainda na perspectiva da TAD, cada saber é saber de pelo menos uma instituição; um mesmo objeto do saber pode 'viver' em instituições diferentes e para viver em uma instituição, um saber necessita submeter-se a imposições, o que o conduz a ser transformado.

A instituição produtora do saber a ensinar é a noosfera, e juntos orientações curriculares tais como PCPE e BCC-PE são resultados de uma transposição didática e dão visibilidade a esse saber produzido pela noosfera e determinam o saber a ser ensinado na escola básica.

Nesse trabalho a instituição que nos interessa, como já fora dito anteriormente, é o Ensino Médio em Pernambuco. No nosso caso particular de análise, o professor e os alunos, são sujeitos dessa instituição e a atividade matemática ao qual lidam é conduzida pelas imposições das orientações curriculares supracitadas.

A relação institucional varia habitualmente de uma instituição para outra instituição. Se $I \neq I'$, pode-se ter (e em geral se tem) $RI(O) \neq RI'(O)$ e, mesmo quando o objeto (O) é considerado em I e I' como correspondente de um mesmo objeto matemático." (CHEVALLARD, 1996, p.5).

“Dados um objeto e uma instituição, a noção de relação remete às práticas sociais que se realizam na instituição e que põem em jogo o objeto em questão, ou seja o que se faz na instituição com este objeto". (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 80).

Quando uma pessoa entra em uma instituição didática I, sua relação pessoal com um objeto (O) que existe em I se estabelece (se ele não existia antes para X) ou se modifica (se ele já existia para X), sob as exigências de $RI(O)$.

Dado um objeto institucional (O) de I, a relação institucional a O em I ($RI(O)$) é caracterizada pela imposição sobre $R(X,O)$ quando X se torna sujeito de I.

Se uma pessoa entra em I, sua relação institucional a (O) depende da posição que p ocupa em I: $RI(p,O)$. Em uma instituição didática, as principais posições são a posição de professor e a posição de aluno.

2.1 Justificativa da escolha do problema

A motivação para escolhermos o problema abaixo, partiu essencialmente por ter sido apresentado na disciplina de Tópicos em Educação Matemática, e nos foi sugerido que aplicássemos numa turma de 9º ano do Ensino Fundamental (de preferência), para que pudéssemos realizar uma atividade envolvendo as relações institucional RI(O) e pessoal R(X,O).

Figura 1: Problema proposto ao professor e aos alunos

Em uma corrida de revezamento, cada corredor percorre $\frac{1}{8}$ de km. Quantos corredores são necessários para uma corrida de $\frac{3}{4}$ kms?

Fonte: (Castella e Jullien, 1991)

Ao analisarmos o problema podemos constatar que a ideia principal é que os alunos mobilizassem seus conhecimentos sobre frações, operações com frações e proporcionalidade, atendendo especificamente nosso objetivo. Além disso, também constatamos que a noção de distância e o Km como unidade de distância desempenham um papel secundário. Desta forma, as análises das orientações curriculares, das expectativas do professor e da resolução dos alunos serão desenvolvidos em torno dos conhecimentos relacionados a frações, as operações com frações e a proporcionalidade.

Um ponto bastante importante que podemos ressaltar é que esse problema nos leva a dois encaminhamentos, de um lado temos um objeto de saber extremamente presente na vida dos alunos que é a proporcionalidade, de outro lado, temos as frações, e as operações com frações que são objetos de saber pouco presente em ambientes fora da escola. Em termos da TAD, à relação pessoal desses alunos com os objetos fração e operação com fração vai ser construída com base na relação institucional, na posição de aluno a esses objetos.

2.2 Procedimentos Metodológicos

Tomamos como instituição I o Ensino Médio atual em Pernambuco e os objetos frações (O1), operações com frações (O2) e proporcionalidade (O3). Daí, formulamos uma questão de pesquisa que se baseia nas relações institucionais de como esses objetos "vivem" nessa instituição e nas relações institucionais que são desenvolvidas com esse mesmo objeto na posição de professor ((RI(P,O)) e na posição de aluno ((RI(A,O)) e comparação dessas relações. O método que utilizaremos para buscar elementos de resposta à nossa problemática se baseia em três elementos:

1. Análise do PCPE e da BCC-PE;

2. Questionário respondido pelo professor do 1º ano do Ensino Médio da rede pública de Ensino;
3. Questionário respondido pelos alunos do 1º ano do Ensino Médio da rede pública de Ensino.

Para caracterizarmos as relações institucionais com os objetos frações, operações com frações e proporcionalidade; fez-se necessário uma análise documental. Desta forma, nos debruçamos nos documentos de maior referência estadual que são os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PCPE), e a Base Curricular Comum para as redes públicas de ensino de Pernambuco (BCC-PE), documentos que foram elaborados conjuntamente pela Secretaria de Educação de Pernambuco e pela União dos dirigentes municipais de educação de Pernambuco (UNIDIME-PE), o primeiro no ano de 2012 e o segundo no ano de 2008.

No que se refere às produções dos alunos e professores esse trabalho, tem caráter exploratório não temos a pretensão de generalizar nenhum resultado. Mas, evidenciar, por meio das análises das respostas do professor e do alunos, contribuições significativas das relações institucionais aos objetos frações, operações com frações e proporcionalidade nas posições de professor e aluno.

De acordo com Comiti e Bellemain (no prelo), um caminho usado na Didática da Matemática para caracterizar a componente pública da relação institucional a um objeto de saber em posição de professor é propor um problema aos professores e pedir que eles explicitem como esperam que seus alunos o resolvam. E, assim, o professor sujeito da pesquisa respondeu à seguinte pergunta: Como espera que seus alunos resolvam esse problema? Antes de responderem foi exposto oralmente que o foco não seria os procedimentos errôneos, mas as maneiras corretas de resolver o problema.

Logo em seguida, o problema foi proposto a uma turma do 1º ano do Ensino Médio, numa escola estadual localizada na cidade de Passira, totalizando 35 alunos. As respostas dos alunos foram analisadas como indícios da relação institucional aos objetos da pesquisa, na posição de aluno.

3 RESULTADOS OBTIDOS

3.1 Análise da Relação Institucional aos objetos em I

a) Relação Institucional no Ensino Médio em Pernambuco com o objeto proporcionalidade

Nesta etapa de escolaridade, o pensamento proporcional, segundo os PCPE (Pernambuco, 2012) apesar de ser explorado desde os anos iniciais, deve ser aprofundado no ensino médio. É importante que o estudante seja levado a analisar e resolver situações envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais, inclusive quando mais de duas grandezas estão em jogo. A apresentação de regras e procedimentos automatizados (esquemas de regra de três, por exemplo) é desaconselhável, pois impede que o estudante consiga atribuir sentido às variações entre as grandezas. Além disso, é fundamental que os alunos estabeleçam conexões entre a ideia de proporcionalidade e outros conceitos da Matemática, como, por exemplo, as funções lineares e as grandezas geométricas (Pernambuco, 2012, p.137).

Tanto a BCC-PE (Pernambuco, 2008) quanto os PCPE nos mostra que a proporcionalidade é fortemente vinculada ao campo das estruturas multiplicativas, tópico situado no bloco dos Números e Operações. Também percebemos que a proporcionalidade favorece conexões com os blocos de (Geometria e Álgebra e Funções). Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos tenham desenvolvido capacidade de reconhecer a relação entre a proporcionalidade direta e a função linear; Resolver e elaborar problemas envolvendo proporcionalidade entre mais de duas grandezas, incluindo problemas com escalas e taxa de variação; Resolver e elaborar problemas envolvendo proporcionalidade, incluindo duas ou mais grandezas direta e/ou inversamente proporcionais.

b) Relação Institucional no Ensino Médio em Pernambuco com os objetos fração e operação com frações

Também encontramos uma conformidade, nos documentos curriculares BCC-PE e o PCPE, no que se refere às técnicas operatórias dos diferentes números (inclusive números escritos na forma fracionária). A BCC-PE vai nos dizer que é preciso proporcionar aos estudantes, o conhecimento das propriedades dos números e de suas operações devem ser priorizadas nesse nível de ensino, evitando-se a excessiva formalização e a utilização, muitas vezes artificial, da linguagem e da notação da teoria dos conjuntos (BCC-PE, 2008, p.106). O PCPE traz que o trabalho com cálculo mental e com estimativas deve ser aprofundado no Ensino Médio. *“É importante ressaltar que as operações*

aritméticas adquirem sentido para o estudante, na medida em que ele é levado a resolver problemas envolvendo essas operações. Os algoritmos das operações aritméticas devem ser plenamente compreendidos pelos alunos desse nível de ensino. É importante que eles reconheçam as propriedades que estão subjacentes a esses algoritmos” (PCPE, 2012, p.136).

O PCPE ressalta a importância de abordar representações e significados variados para os números racionais e explicitando a seguinte recomendação: *“Nessa etapa de escolaridade, o estudante deve conhecer e estabelecer relações entre as diferentes representações dos números. Por exemplo, consolidar que $\frac{1}{2} = 0,5$ ” (op. cit., p.136).*

Ainda segundo o PCPE espera-se que nessa fase os alunos sejam capazes de utilizar os diferentes significados e representações dos diferentes números. Pois,

“...desde os anos iniciais os estudantes estabelecem contato com diferentes números, no Ensino Médio, como etapa de consolidação das aprendizagens realizadas no Ensino Fundamental, é importante que os alunos percebam que os números se agrupam em diferentes conjuntos numéricos. Com isso, eles devem também perceber que algumas propriedades válidas em determinado conjunto numérico já não valem para outros conjuntos” (op. cit., p.136).

Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos tenham desenvolvido capacidade de reconhecer as características dos diferentes números, operações e suas propriedades e a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos; Compreender as diferentes representações de um mesmo número real (fração, radical, potência etc.); Compreender as propriedades dos números e de suas operações.

Percebemos por meio da análise dos documentos curriculares acima supracitados, que tratam as operações de diferentes números de forma geral, sem especificidades.

c) Elementos da Relação Institucional aos objetos em jogo na posição de professor

Como já fora dito, solicitamos que o professor respondesse de que maneira(s) achava que seus alunos do 1º ano do E.M. resolveriam o problema (Figura 2).

Elucidamos as respostas do sujeito como indicativo da relação institucional em I, na

posição de professor, com os objetos dados. Os objetos equivalência de frações, divisão de frações, regra de três, uso de desenhos e proporcionalidade foram indicados pelo professor como disponível no repertório de conhecimentos de um aluno de 1º ano do E.M. e, capazes de serem mobilizados na resolução do problema indicado.

d) Relação Institucional no Ensino Médio em Pernambuco com os objetos fração e operação com frações

O problema supracitado foi proposto a 35 alunos de 1º ano E.M., no ano de 2017:

Tabela 1- Respostas dadas pelos alunos

Resposta	Quantidade de alunos	Percentual
6 corredores (justificativa correta)	11	31,43%
6 corredores (com justificativa incorreta)	10	28,6%
6 corredores (sem justificativa)	1	2,86%
Outras respostas	9	25,71%
Em branco	4	11,43%

Verifica-se que 22 alunos (62,86%) fornecem a resposta correta (6 corredores) justificada corretamente e incorretamente ou sem explicação.

À procura da ideia central implícita às resoluções dos alunos nos fez estabelecer a seguinte classificação das 10 respostas corretas e justificadas corretamente:

Tabela 2- Respostas corretas e justificadas corretamente

	Quantidade	% das respostas corretas	% do total dos alunos
Divisão de frações	0	0%	0%
Equivalência de frações	8	72,72%	22,86%
Proporcionalidade	2	18,18%	5,71%
Uso de desenhos	1	9,09%	2,84%
Total	11	100,00%	31,43%

Ao analisarmos a tabela acima, percebemos que nenhum dos participantes, da pesquisa, que resolvera corretamente a questão, utilizou a divisão de frações.

A equivalência de frações é respondida por quase $\frac{3}{4}$ dos sujeitos (8 sujeitos - 72,72% dos que responderam corretamente):

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \text{ logo são 6 corredores.}$$

O raciocínio baseado na proporcionalidade é construído por 3 sujeitos onde os alunos mobilizam a propriedade das proporções (o produto do meio é igual ao produto dos extremos):

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Observa-se também que 1 aluno utiliza desenhos, que fora interpretado como representações das frações como relação parte-todo (Damico, 2007).

Vamos agora nos dedicar sobre os erros cometidos pelos alunos.

Dez alunos responderam 6 corredores, mas forneceram justificativas incorretas. Destes, três fizeram a seguinte operação:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{24} = 6$$

Para esse tipo de resolução nos parece que os alunos tentaram mobilizar a propriedade das proporções e diante da impossibilidade de fornecer $\frac{1}{6}$ como resposta para o problema, transformaram $\frac{1}{6}$ em 6. Quatro alunos ainda desse grupo (justificativas incorretas) nos apresentaram a seguinte resolução:

$$\frac{1}{8} = 0,125 \text{ e } \frac{3}{4} = 0,75$$

Nessas operações os alunos interpretaram as frações como quociente (Damico, 2007). E, em seguida, multiplicaram os quocientes encontrados, ou seja, $0,125 \cdot 0,75$.

Pouco mais de 25,0% dos alunos sujeitos dessa pesquisa desenvolveram respostas erradas. Nos procedimentos percebemos uma forte influência do contrato didático¹ (Brousseau, 1989; Besot, et alli, 2009) relativo à utilização das operações com frações (adição, multiplicação e divisão). Para ser eficientes como estudantes, esses sujeitos acabam desenvolvendo comportamentos automáticos que segundo Sierpinska (1999) referem a esquemas que, independentemente da pergunta feita, o aluno desenvolve para obter algo significativo.

Considerações Finais

Percebemos ao término deste trabalho que a relação pessoal dos alunos e professores pernambucanos é marcada pela relação institucional aos objetos fração, operações com frações e proporcionalidade na Instituição I Ensino Médio em Pernambuco.

É importante ressaltar que o objeto regra de três não faz parte da relação institucional na posição de aluno, apesar de ter sido esperado pelo professor, nenhum dos que resolveram corretamente o problema, utilizaram a regra de três.

Por outro lado, observa-se um distanciamento da relação institucional na posição de aluno, ao objeto divisão com frações com respeito à relação institucional em I a esse mesmo objeto. Disto, uma pergunta se faz bastante pertinente neste momento: Embora o procedimento de resolução pela divisão de frações conste nas orientações curriculares, e o professor tenha afirmado que os alunos utilizariam essa técnica, nenhum dos que resolveram corretamente o problema, utilizaram a divisão de frações. Como interpretar essa evidência? Cenas para a realização de próximas pesquisas.

REFERÊNCIAS

ARSAC G., DEVELAY M., TIBERGHIE A. **La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie**, éd. IREM de Lyon et LIRDIS, 1989.

BEHR, M.J.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. **Rational number concepts**. In LESH, R.; LANDAU, M. (Ed). **Acquisition of Mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

¹ O contrato didático foi estudado inicialmente por Guy Brousseau, e faz referência às cláusulas, em partes explicitadas, mas, em grande parte, implícitas, que regulam a divisão de responsabilidades entre professor e aluno, na gestão de um saber (Menezes, 2006).

BESSOT A.; COMITI C.; Le THI H.C.; LE VANT T. **Eléments fondamentaux de didactique des mathématiques** (édition bilingue). Presses de l'Université Nationale du Vietnam à Ho Chi Minh Ville, 2009.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs Objet d'étude et problématique**. Recherches en **Didactique des Mathématiques**. vol. 19, n°1, pp. 77-124, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1999.

BRASIL. SEF/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998.

BROUSSEAU G. **Le contrat didactique le milieu**. Recherches en **Didactique des Mathématiques**, Vol.9.3, pp. 309-336, Genoble: La Pensée Sauvage, 1989.

CHEVALLARD, Y. **Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica**. In. **Didáctica Das Matemáticas** /Brun, J...[Et Al]; Direção: Jean Brun. Trad: Maria José Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Genobre: La Pensée Sauvage, 2^a edição, 1991.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CASTELLA, C. ET JULLIEN M., **La differentiation instituionnelle: 'Qu' est-ce que savoir?'**, in Actes de la 6^o école d'été de didactique des mathématiques, pp. 174-178, 1991.

COMITI C., BELLEMAIN P. M. B., **Eléments de la Théorie Anthropologique du didactique**: introduction et mise en oeuvre, no prelo.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o Ensino de números racionais no Ensino Fundamental**. São Paulo, 2007.

MENEZES, A. P. A. B. **Contrato didático e transposição didática: Inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6^a série do Ensino Fundamental**. Recife, 2006.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as redes públicas de ensino de Pernambuco: Matemática**. Secretaria de Educação. Recife: PE. 2008.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Matemática**. Secretaria de Educação. Recife: PE. 2012.

RAVEL-BUENO, L. **Des programmes a la classe: etude de la transposition didactique interne**: exemple de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique. 2003. Tese (Doutorado em Matemática e Informática). Universidade Grenoble I Joseph Fourier, Grenoble, 2003.

SIERPINSKA, A. et al. **Evaluation of a teaching design in Linear Algebra: The case of linear transformations-** Reserches en **Didactique des Mathématiques**, vol. 19, n° 1, pp. 7-40, 1999.