

A MATEMÁTICA CIENTÍFICA E A MATEMÁTICA ESCOLAR: COMPREENDENDO CONCEITOS DO COMPRIMENTO DO CÍRCULO, ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA E DO VOLUME DA ESFERA.

Autor(a): Ana Caroline Almeida da Silva ¹
Co-autor (1): Francisco Jucivânio Félix de Sousa²
Orientador (3): Elano Caio do Nascimento³

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – Campus Crateús –
carol.nhaalmeida@hotmail.com¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – Campus Crateús –
jucivaniofelix@uol.com.br²

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – Campus Crateús –
elano.caio@ifce.edu.br³

Resumo:

O presente trabalho apresenta como objetivo descrever o surgimento das fórmulas do perímetro da circunferência, da área do círculo e do volume da esfera ao longo da história, desde como se deram as primeiras resoluções até as primeiras noções do cálculo dadas por Arquimedes (287-212 a. C) e Eudoxo (406-355 a. C). Buscamos observar também a perspectiva do Cálculo Diferencial e Integral, que se conjecturou ainda na idade moderna, com a demonstração de teoremas e a aplicação das proposições usadas para construção dessas fórmulas. A partir disso, refletimos sobre a utilização da explicação desses métodos no ensino básico, chegando à conclusão de que este ensino pode gerar bons resultados quando apresentados dialogando com os conceitos históricos, por meio da História da Matemática e com a apresentação dessas demonstrações, sendo uma maneira de buscar promover o entendimento dos docentes em compreender o surgimento das fórmulas empregadas e de que maneira usá-las. Para isso, utilizamos pesquisas bibliográficas feitas a partir de autores como Stewart (2013), Boyer (1974) e Moreira (2004), onde assimilamos a visão deles a cerca da contribuição da matemática científica para o ensino regular e a influência desta no campo de conhecimento do profissional do ensino. Refletir-se que é necessário compreender o caminhar da matemática ao longo da história da humanidade e dialogar como transformar esses conceitos científicos estudados nas universidades para o ensino básico é algo que o professor dessa ciência precisa buscar, visando transformar o ensino da disciplina de Matemática em algo refletido e compreendido pelos alunos do ensino fundamental e médio.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral, História da Matemática, Ensino Básico.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos para o cálculo do perímetro da circunferência, área do círculo e volume da esfera, utilizados no Ensino Básico vão muito além de fórmulas decorativas. Os estudos para estes fins começaram pouco mais de 200 anos a. C com matemáticos que já possuíam em seus cálculos certa noção de integral, mesmo sem esta ter sido desenvolvida ainda. O Cálculo Diferencial e Integral se deu muitos séculos depois disso e surgiram com o intuito de se calcular áreas de certas figuras planas e de traçar a tangente de uma curva. A partir dessas descobertas, têm-se como lidar com taxas de variação de grandezas.

Conforme afirma Mol (2013), ao longo da história, muitos matemáticos procuraram formas de se calcular áreas de figuras que não possuíam lado, e ainda na antiguidade desenvolveram formas as quais não sabiam deduzi-la, mas conseguiam encontrar o resultado almejado. Foi atribuído a Eudoxo (406-355 a. C) um método, o qual foi desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes (287-212 a. C) conhecido como Método de Exaustão. Este era utilizado para calcular a aproximação da área do círculo, a partir da inscrição de figuras, as quais já eram conhecidas suas fórmulas para o cálculo da área, como quadrados e triângulos. Com estes cálculos, Arquimedes chegou a uma aproximação do valor de π .

Autores como Boyer (1986), Garbi (2010) corroboram que o método de derivadas e integrais só foi idealizado muitos séculos depois. Em meados do século XVII, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1726) fundamentaram as aplicações que atualmente conhecemos. Leibniz (1646-1726), além de apoiar-se na noção de diferencial descrita por Newton (1642-1727), introduziu a notação utilizada no cálculo, atribuindo dy - para indicar a diferencial, e \int - um S de *summa* (soma) estilizado indicando a integral. Após essas descobertas, muitos matemáticos passaram a trabalhar no aprimoramento deste instrumento, tais como Augustin Cauchy (1789-1857), Carl Gauss (1777-1855), Bernhard Riemann (1826-1866), Weierstrass (1815-1897) e Lagrange (1736-1813).

O estudo de áreas e volumes através de fórmulas prontas nos conduz a um entendimento mais aprimorado a partir da descoberta da origem e aplicação destas. Por meio do Cálculo, podemos validar estas fórmulas partindo do conceito

da figura no plano ou no R^3 . Será demonstrada, ao longo deste trabalho, a relação existente entre a Matemática Básica e a Matemática acadêmica, concluindo assim que uma gera a outra, e que a inserção da história desta ciência com a exposição da origem das fórmulas trabalhadas pode influenciar positivamente o ensino/aprendizagem dos alunos.

2. METODOLOGIA

Andrade (1997) afirma que uma pesquisa bibliográfica pode ser desenvolvida como um trabalho em si mesmo ou constituir-se numa etapa de elaboração de monografias, dissertações, etc. Sendo esse artigo fruto de minhas pesquisas e inquietações visando associar meios que possam evidenciar melhorias no ensino aprendizagem dos discentes do ensino básico na área de Matemática.

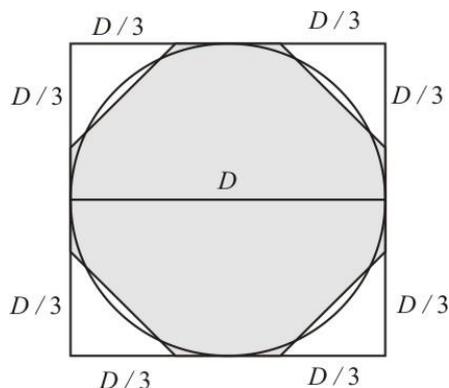
Buscou-se dialogar com diversos autores, como Stewart (2013), Boyer (1974) e Moreira (2004), que abordam a história da Matemática em seus livros, além de buscas por artigos científicos na área de Educação Matemática.

Procuramos discorrer todo o contexto histórico envolto do descobrimento das fórmulas: Comprimento da Circunferência, Área do Círculo e Volume da Esfera, entender as noções de Cálculo no desenvolvimento destas e compreender como aplicar essas demonstrações para o melhor entendimento dos alunos no Ensino Básico.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Mol (2013), Garbi (2010) relatam que muitos pensam que foram os gregos os primeiros a estudar a circunferência, mas os relatos sobre o cálculo da área de um círculo se deu ainda com os primórdios da Matemática. Ahmes, um escriba egípcio, transcreveu cerca 84 problemas de Aritmética e Geometria de um texto matemático mais antigo. O papiro encontrado com estes registros é chamado de Papiro de Rhind, em homenagem ao egiptólogo escocês Alexander Rhind por tê-lo encontrado. Neles constavam várias resoluções, porém sem nenhuma justificção. O escriba descreveu como se encontrar a área do círculo através da utilização de polígonos, mais especificamente um octógono. Para se compreender melhor o que Ahmes fez, vejamos:

Figura 1: Conjectura sobre a origem da regra



Fonte: GARBI (2010).

Para ele, a área do quadrado era igual à área do círculo sobre ele circunscrito. Tomando-se $D = 8/9$ como o valor do lado do quadrado, podemos observar que este é o mesmo valor do diâmetro do círculo. Assim, temos que a área do quadrado é igual a $A = D^2$. O octógono pode ser formado dividindo-se os lados do quadrado em três partes iguais, com isso obtemos quatro triângulos retângulos com área definidas por,

$$A_{\text{triângulos}} = \frac{\frac{D}{3} \cdot \frac{D}{3}}{2} = \frac{D^2}{18}$$

Onde podemos obter a área do octógono subtraindo da área do quadrado, a área dos quatro triângulos:

$$A_{\text{octógono}} = D^2 - 4 \cdot \frac{D^2}{18}$$

$$A_{\text{octógono}} = \frac{7}{9}D^2,$$

ou seja, $\frac{63}{81}D^2$, o qual teria sido aproximado para $\frac{64}{81}D^2 = \left(\frac{8}{9}D\right)^2$. Isso nos mostra, em linguagem moderna, uma extrema aproximação para $\pi \cong 3,1605$, o que antecipa os gregos em mais de um milênio.

3.1 O MÉTODO DE EXAUSTÃO

O grego Eudoxo de Cnido (c. 408 – 355 a. C.) foi o maior matemático de sua época, além de ser astrônomo. Este nos conduz a conhecer um método dantes já utilizado, mas sem tanta propriedade, e que conduziria a construção do Cálculo Diferencial e Integral muitos séculos depois.

Ao trabalhar com o cálculo de perímetros, áreas e volumes de figuras curvilíneas, Eudoxo observou que poderia sobrescrever polígonos, os quais já se conheciam o cálculo de suas medidas, nessas figuras e assim chegar a um resultado aproximado de sua área ou volume. O Método de Exaustão tem como base um postulado fornecido por Eudoxo a Arquimedes (c. 287 – 212 a. C.), o qual é dado por: Dado duas grandezas não nulas a e b , existe um inteiro m tal que $ma > b$. A partir deste postulado tem-se que: “se m é uma grandeza dada, e ε é uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq \varepsilon \leq 1$, então dado $c > 0$, existe um inteiro n_0 tal que $M(1 - \varepsilon)^n < C$ para todo $n \geq n_0$ ”.

Em outras palavras, temos pelo postulado que $\lim_{n \rightarrow \infty} M(1 - \varepsilon)^n = 0$ que seria descoberto anos depois. Sendo assim, Arquimedes de Siracusa (c. 287 – 212 a. C.) desencadeou o estudo da propriedade de exaustão e por isso esta é mais atribuída a ele do que a Eudoxo. Com isso, Arquimedes analisou a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo, encontrando como resultado uma aproximação do valor de π . A partir de um hexágono circunscrito no círculo, foi duplicando os lados até obter um polígono com 96 lados, analisando da seguinte forma:

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70}, \text{ isto é, } 3,1408 < 3,1415 \dots (\text{valor aproximado de } \pi) < 3,1428.$$

3.2. PREDEFINIÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Segundo Garbi (2010), o período após o surgimento e desenvolvimento da matemática grega, a Idade Média, foi registrado pelo pouco avanço da Matemática. Porém, com o início do Renascimento, a evolução desta ciência se deu na Europa com o ressurgimento da investigação científica. A ideia inicial foi justamente o cálculo de áreas e volumes, partindo do que foi desenvolvido por Arquimedes de Siracusa com o Método de Exaustão e por outros matemáticos como Pappus de Alexandria (cerca de 300 – 350 a. C.) que se utilizou do método para calcular volumes de sólidos de revolução – sólidos obtidos pela rotação de uma figura plana em torno de um eixo, - e como Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) que criou os

primeiros métodos de integração descritos em livro produzido por ele.

Com a aplicação dos métodos até então desenvolvidos, matemáticos de várias partes da Europa passaram a entender esse estudo através da geometria. Pierrri de Fermat (1601 – 1665) encontrou formas de obter máximos e mínimos de uma curva através da tangente, além de, em uma outra área de estudo, aprimorou a ideia de integral no cálculo da área e do comprimento de curvas.

Até este momento, a noção de cálculo era, de certa forma, dispersa. Foi em meados de 1670 que, independentemente, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), um alemão e Isaac Newton (1642-1727), um inglês entenderam que os problemas com a tangente e os problemas com áreas tinham grande relação, pois eram processos inversos. A partir daí foi criado o Teorema Fundamental do Cálculo, que pôde unificar ambos os procedimentos tornando-se o marco da descoberta do cálculo, além de permitir saltos significativos no desenvolvimento dos estudos matemáticos e físicos.

A aproximação de Newton do cálculo foi através da ideia de fluentes e fluxão, ou seja, em seus estudos entendia fluentes como grandezas geradas e fluxão como a velocidade dessas grandezas. Assim sendo, a assimilação de fluentes se dava através da integral e a de fluxão através da derivada. Já a de Leibniz por meio do estudo de infinitesimal, desenvolvendo o Cálculo Diferencial através da interpretação de uma taxa quociente das quantidades infinitesimais dy e dx dada por $\frac{dy}{dx}$. Este também criou o sistema de notação utilizado atualmente no cálculo.

Houve grande conflito a cerca da procedência e da criação do cálculo. Leibniz sempre manteve seus estudos acessíveis ao público e publicou-os pouco tempo após desenvolvê-los, por volta de 1684. Newton sempre condicionou suas descobertas a um público seletivo e estas só foram publicadas em 1704. Apesar de hoje sabermos que estes estudos foram feitos independentemente, para sociedade da época isso não era tão evidente e por isso ocorreu uma terrível disputa sobre a primazia da descoberta do cálculo. Newton, após descobrir que Leibniz havia publicado algo que tendia ser o mesmo que ele havia descoberto, entendeu que seu trabalho havia sido plagiado e resolveu tornar suas descobertas públicas, com isso, começou-se a disputa para saber quem havia dado início a este estudo. A Real Sociedade inglesa decidiu intervir nessa batalha que não teve vencedor, pois é indubitável que os dois, de uma maneira ou de outra, contribuíram grandemente para a Matemática e se tivessem trabalhado juntos suas descobertas seriam incomensuráveis.

Muitos outros matemáticos deram continuidade aos estudos sobre o cálculo, dentre eles Leonhard Euler (1707–1783) que entendeu que este assunto pode ser aplicado tanto na resolução da matemática pura como de questões aplicadas. Anos depois, o francês Augustine Louis Cauchy (1789-1857) detalhou que poderia se substituir a ideia de infinitesimal pela de um Limite. Porém, quem desenvolveu esta noção com definições claras e sem perspectiva de erro foi o alemão Karl Weierstrass (1815-1897).

A priori, o cálculo era utilizado apenas em problemas com funções contínuas, mas Bernhard Riemann (1826-66) mostrou a validade desta teoria também para as funções descontínuas. A influência deste matemático para esta demonstração foi tamanha que seu trabalho é evidenciado nos livros didáticos utilizados atualmente, possuindo também um assunto exclusivo sobre sua contribuição: Integrais de Riemann.

Assim, entendemos que a Matemática é uma ciência que a cada dia é construída, descoberta e demonstrada. Buscar descobrir o que realmente é essa disciplina, é adentrar profundamente em sua essência. Aprender Matemática a base do que nos é transferido na escola é superficial e algumas vezes inútil. Ela vai muito além de um conjunto de fórmulas e regras.

3.3 APLICAÇÕES DAS NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Entender a Matemática Científica¹ não é algo fácil, ainda mais quando mal se sabe as fórmulas de praxe do Ensino Médio. Porém, entender como essas fórmulas se comportam e porque temos que usá-las para certas resoluções nos trará um sentido maior ao que está sendo estudado. Assim, veremos no decorrer do capítulo as implicações que a ciência matemática gera no ensino básico.

Na antiguidade, o desenvolvimento da Matemática sempre se deu pela necessidade do homem de fazer cálculos simples utilizados no seu cotidiano. Os egípcios, por exemplo, iniciaram sua compreensão a cerca desta ciência através da divisão das terras para o cultivo e da construção de seus monumentos. Estes buscavam apenas encontrar o resultado para suas questões, geralmente advindas a partir de algo útil e concreto. Não era uma preocupação deles, demonstrar o que era feito ou exibir uma forma geral para as resoluções encontradas.

Séculos mais tarde, os gregos passaram a incorporar essa importância à Matemática. Tales de Mileto passou a compreender esta ciência de uma forma mais abstrata,

¹Para Moreira (2004, pág. 18) a Matemática Científica seria “um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e percebem os matemáticos profissionais”.

desenvolvendo teoremas e demonstrações. A partir de então, a Matemática passou a ser abstrata e dedutiva, exigindo raciocínio e entendimento através da razão e sendo provada a partir de argumentos racionais.

Desde a construção dos números, dos conjuntos e das operações básicas até o conceito de sequência, de trigonometria e de geometria que aprendemos no decorrer da nossa vida escolar, existe toda uma teoria, definições e demonstrações, as quais revelam como tudo isso surgiu e com qual intuito foram criados. Nisto consiste a matemática científica, explorar esse conhecimento até então privado ao nosso saber. Mas como fazer com que essa perspectiva seja direcionada ao ensino básico? Haveria alguma forma de fazer com que o professor “didatizasse” esse ensino?

Yves Chevallard (1991), analisando a relação entre a Matemática científica e a Matemática escolar, define-se como “transposição didática” a passagem do saber científico para o “saber ensinado”, como o próprio autor nomeia. Essa transposição seria uma forma de tomar esse saber científico, já que este por sua vez demonstra tudo o que de fato é matemática, e ensiná-lo de uma forma mais simples, repassando apenas o que seria necessário ao aprendizado do aluno. Chevallard entende a matemática científica como “a fonte privilegiada de saber”, sendo a referência principal para o ensino matemático escolar (MOREIRA, 2004, pág. 16).

Por outro lado, André Chervel (1990) defende que, no ensino escolar, certos conhecimentos não podem ser apresentados em sua pureza e forma original. Assim, as disciplinas escolares deveriam ser apresentadas até certo ponto como organizações independentes. Também explicita que a pedagogia seria “parte integrante” desse processo de ensino construído a partir do ambiente escolar e da prática pedagógica (MOREIRA, 2004, pág. 17).

A partir dessas ideologias, exporemos a seguir até que ponto a Matemática científica pode ser aplicada ao ensino básico e de que forma ela pode ser trabalhada. Mostrando também, que este por sua vez, nem sempre se preocupa em expressar fielmente a matemática.

3.4. AS DEMONSTRAÇÕES DAS FÓRMULAS ESTUDADAS NO ENSINO MÉDIO COMO INFLUÊNCIA POSITIVA NA APRENDIZAGEM

A partir de um estudo sobre “O olhar de alunos e professores sobre a Matemática e seu ensino”, Yara Maria Leal Heliodoro (2002) descreve, por meio de

relatos de estudantes, que um dos motivos para falta de compreensão deles a cerca dos conteúdos matemáticos vistos em seu ensino básico seria a omissão do por que se utilizarem determinados cálculos. Essa omissão, segundo ela, “contribui para uma série de perdas no campo de uma aprendizagem mais sólida que permita ao aluno fazer o uso de modo competente e flexível dos cálculos aritméticos”, tornando assim, este ensino “alienante” e “desestimulador” (HELIODORO, pág. 2002).

A ideia do ensinar técnicas científicas aos alunos não seria uma proposta deste trabalho, mas sim fazê-los compreender estes porquês por meio da exposição do processo de construção das fórmulas e conceitos matemáticos até então desconhecidos por eles.

Existem formas simples de expor isso aos alunos, não para que eles aprendam como se faz ou entendam um conteúdo o qual não é a eles direcionado, mas para que compreendam como é dado o processo de construção daquilo que se é estudado. Tomando como exemplo o objetivo deste trabalho, é fácil ver que jamais eles compreenderão o cálculo com integrais. Porém, explicar que se dividirmos o círculo em retângulos com espessura suficientemente pequena tal que estes o cubram em quase sua totalidade utilizamos a integral que consiste na soma das áreas desses pequenos retângulos e assim chegaremos ao resultado final que é a fórmula dada para esse cálculo. Esses resultados podem ser demonstrados aos alunos por meio do Geogebra, uma ferramenta muito útil na Matemática, pois por meio dele podemos entender a forma geométrica dos conteúdos aplicados facilitando a compreensão e validando o que é estudado.

Fazê-los compreender as noções básicas como a equação da circunferência, como se comporta o círculo trigonométrico, entender as áreas mais simples, em particular a do retângulo e do quadrado, contribui para uma maior facilidade de entendimento. Quando o educando consegue “ver” o que está sendo mostrado, entendendo a forma geométrica com que a matemática se comporta, consegue assimilar a importância de se aprender essa ciência. Sem colocar na mesa as situações adversas enfrentadas pelo professor, a metodologia utilizada para este fim seria preponderante para que estes objetivos fossem alcançados, além da familiarização que este deve ter com os conteúdos específicos do ensino acadêmico.

Os Parâmetros Curriculares Nacional - PCN's, na área de Matemática sugerem esse ensino como um “processo de transposição didática”, o qual ajuda a “explicar, histórica e socialmente, a evolução e a produção do conhecimento matemático” (BRASIL, 1997). Ou seja, a relação entre a matemática escolar e a científica é suficientemente grande ao ponto de através do conhecimento de ambas entendermos que não são

disjuntas, mas complementares. A medida que a ciência explica a origem de tudo o que se é estudado, a escolar mostra a facilidade da aprendizagem e a aplicação prática e concreta.

Com base nas concepções expressadas anteriormente, segundo Chevallard (1991), haveria sim uma “didatização”, sendo a matemática escolar apenas resultado dos conhecimentos científicos. Por sua vez, Chervel(ano) discorda ao afirmar que essa disciplina seria autônoma e construtora de sua própria forma de ensino, restringindo assim essa construção apenas para o âmbito escolar. Logo, podemos ver que se ambas as linhas de pensamento se fundissem, ampliaria os conhecimentos dos docentes e educandos proporcionando um ensino/aprendizagem eficaz.

4. CONCLUSÕES

Ao longo desse trabalho desenvolvemos como se dá o cálculo do perímetro da circunferência, da área do círculo e do volume da esfera, além de expor o surgimento dos cálculos para estas resoluções ao longo da história e do método com o qual foi exposto neste trabalho. A partir disso, compreendemos que podemos criar métodos não para que este ensino científico seja aplicado nas escolas, mas para que sirva como motivação e compreensão dos alunos que a Matemática é fundamental para sua aprendizagem.

Ao dialogarmos com autores da Matemática Acadêmica, como Carl Boyer (1986), Rogério Santos Mol (2010) e James Stewart(2001), os quais nos fizeram perceber que esta ciência foi sendo constituída em cada época, onde cada civilização a tinha para uma finalidade, até chegarmos a concepção do abstrato, o qual a formulou de modo a demonstrar esta ciência em sua pureza e exatidão.

Complementamos nosso estudo com pesquisadores da área da Educação Matemática, como Moreira (2004), Heliodoro (2004) que nos apresentaram um olhar crítico em relação ao ensino de Matemática no ensino básico e nos embasaram na aplicação de um ensino onde a explicações dos porquês é de fundamental importância para a aprendizagem do educando.

Apesar da realidade em que vivemos, os profissionais da área da educação precisam buscar se capacitarem constantemente para melhorar o ensino. Compreender e fazer entender que o ensino da Matemática deverá ser aprimorado pelos docentes dessa área de ensino, onde os mesmos precisam aperfeiçoar e melhorar as metodologias de ensino, infelizmente ainda percebemos casos em que muitos docentes apenas expõem o conteúdo sem nenhum diálogo com os estudantes e nem com o contexto que o rodeiam.

5. REFERÊNCIAS

ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução à Metodologia do trabalho científico**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1997.

BALESTRI, R. D. **A participação da história da matemática na formação inicial de professores de matemática na ótica de professores e pesquisadores**. PhD thesis, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)–Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

BARDI, J. S. **A guerra do cálculo**. Rio de Janeiro (disponível em: <<https://www.oficinadanet.com.br/post/14658-a-guerra-do-calculo>>).

BOYER, C. B., and Pérez, M. M. **Historia de la matemática**. Alianza, 1986.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. 5. Ed. rev. e ampliada. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

HELIODORO, Y. M. L. **O Olhar de alunos e de professores sobre a matemática e o seu ensino**. Departamento de Educação, Universidade Católica de Pernambuco, 2002.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.138 p.

Moreira, P. C. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**. Tese do Programa de Pós-Graduação. Faculdade de Educação – UFMG, 2004.

STEWART, J. **Cálculo**, vol. 1. Pioneira. Thomson Learning, 2001.