

## A Torre de Hanói: Uma sequência didática no Ensino Superior

Leonardo Lira de Brito

Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)- [Leonardoliradebrito@gmail.com](mailto:Leonardoliradebrito@gmail.com)

### Resumo:

Este artigo tem como objetivo descrever a experiência realizada no Laboratório Virtual de Matemática da UFCG campus Cuité, na turma de Licenciatura em Matemática, onde utilizando o jogo, a Torre de Hanói, foi trabalhada uma sequência didática para ser introduzido o conceito de função exponencial. Para atingir tal objetivo, iniciamos a aula falando um pouco da história da torre de Hanói, como surgiu, a lenda por trás da torre, logo após explicamos as regras do jogo e a partir daí demos início a nossa sequência didática. Ao final desse relato foi possível perceber que a utilização das TIC não deve ser vista apenas como um momento recreativo que possa tornar uma aula mais divertida ou diferente, as TIC devem ser bem mais do que isso. Seu uso deve estar voltado para o ensino-aprendizagem, baseado numa proposta de construção de conhecimentos e resolução de problemas, extraindo de suas atividades, momentos em que o aluno possa refletir e perceber uma ideia relativa ao conhecimento matemático. Outro aspecto muito importante observado foi a interação dos envolvidos na atividade, todos os alunos se mostram muito entusiasmado em esta participando e querendo resolver os desafios que eram propostos.

**Palavras Chaves:** Tic. Educação matemática. Jogos.

### 1.0 Introdução

O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) nos cursos de licenciatura nas diferentes regiões do Brasil tem adquirido maior espaço e importância, quer seja como uma disciplina ou como um “espaço” auxiliar ao trabalho de formação de professores. Este artigo é fruto da disciplina computador no ensino da matemática, desenvolvido no laboratório virtual de matemática, pelo professor da disciplina e os alunos que cursam a disciplina no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande UFCG – Campus Cuité.



Figura 01: Laboratório virtual de Educação Matemática da UFCG campus Cuité

O laboratório virtual de matemática tem capacidade para 25 alunos. É bem equipado com 26 computadores, todos conectados a internet. Possuem um série de softwares educacionais instalados, como o GeoGebra, Régua e compasso, Excel e winplot.

Um dos objetivos dessa disciplina consiste em discutir a utilização das tecnologias no ensino da matemática, pesquisar e auxiliar no desenvolvimento de materiais e jogos que possam ser utilizados como projetos, oficinas, minicursos ou no desenvolvimento de determinados conteúdos nas aulas de Matemática. Sob o olhar de quem está em processo de formação inicial, no caso dos alunos envolvidos, procuramos discutir e elaborar propostas de atividades que possam contribuir na diversificação do processo de ensino-aprendizagem.

Quando comparadas aos modelos mais tradicionais que raramente fogem ao esquema: resolução de exemplos – definição de um conceito – exercícios de fixação – correção de parte das atividades – prova escrita com algumas questões.

Não queremos entrar no mérito deste tema, mas apenas identificar que é possível apresentar outras propostas de ensino-aprendizagem de Matemática como a utilização de jogos pedagógicos o uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC) que possam contribuir com o trabalho de sala de aula.

Isso acontece muito no ensino de Matemática, onde muitos professores não querem “perder boa parte do tempo” de suas aulas utilizando recursos didáticos ou porque alguns professores não tiveram a oportunidade de vivenciar propostas pedagógicas com esses recursos durante seu processo

de formação inicial e nem se preocuparam em ter uma formação continuada onde fosse possível ter essa complementação na formação.

O nosso principal objetivo com esse trabalho é mostrar como o uso da torre de Hanói digital pode contribuir para a formação inicial dos professores de matemática a medida que o uso das tecnologias medida pelo conhecimento matemático pode levar o futuro professor a uma prática mais reflexiva do ponto de vista pedagógico.

Observando em alguns sites de pesquisa não encontramos nenhum trabalho a respeito da torre de Hanói a nível de graduação ou destacando a importância de se trabalhar no ensino superior com alunos da licenciatura.

## **2.0 O uso das tecnologias da comunicação e informação no ensino de matemática.**

Em meio a revolução tecnológica e científica, onde as informações trafegam com grande velocidade, surge a necessidade de termos domínio sobre uma das ferramentas essenciais nessa revolução que é o computador e a internet.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais as tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas. Estudiosos do tema mostram que escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem são influenciados, cada vez mais, pelos recursos da informática.

Assim temos mais um desafio para as escolas, o de incorporar no seu trabalho as tecnologias da informação e comunicação de modo que o seu uso possa contribuir para tornar nossas aulas mais atrativas e dinâmicas fugindo um pouco do ensino tradicional que muitas vezes é usado apenas a oralidade e o quadro nas formas de se comunicar e conhecer.

Hoje em dia, sabemos que a grande maioria das pessoas tem acesso a essa ferramenta de pesquisa, por ser de fácil acesso. Então porque não usar esse meio de comunicação para auxiliar na aprendizagem? Segundo os PCN o uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática à medida que:

Evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas; (BRASIL: 1998, p. 43;44)

Ainda segundo os PCN, o uso das tecnologias possibilita o desenvolvimento, dos alunos e o interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem permitindo assim que os alunos construam uma visão mais

completa da verdadeira natureza da atividade Matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo.

E com o uso das tecnologias surge a gamificação como uma possibilidade de se ensinar matemática. A gamificação consiste em aplicação de elementos de jogos em atividades de não jogos. Com isso torna a atividade ou a proposta mais desafiadora para o aluno, pois ele se sentir desafiado a tentar “ganhar” ou seja cumprir o que lhe foi proposto.

### **3.0 Metodologia**

Segundo uma lenda, a Torre de Brahma, encontra-se no centro do mundo, sob a cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. Neste centro, há uma placa de latão onde estão fixados três pinos de diamantes, em um dos quais ao criar o mundo, Brahma colocou 64 discos de ouro, apoiadas um sobre o outro, e de diâmetro decrescente a partir da base. Segundo as imutáveis leis de Brahma, os sacerdotes do templo estão incumbidos da tarefa de transferir a pilha de discos para um dos outros dois pinos trabalhando dia e noite sem cessar, sendo que devem mover um disco por vez e nunca pôr um disco maior sobre um menor que ele. A vida decorrerá durante essa tarefa, após o fim da tarefa o templo, a torre e os sacerdotes serão transformados em pó, e o mundo desaparecerá com o estrondo de um trovão.

No Ocidente, atribui-se a criação do jogo e da lenda da torre de Hanói, ao matemático francês Eduard Lucas. O jogo teria sido comercializado como brinquedo sob a autoria do Professor Claus do colégio LI- SOU STIAN. Como brinquedos eram usados oito discos, segundo as mesmas regras descritas na lenda. (BARROS: 2011, p. 28)

### **Estrutura**

A torre de Hanói é um jogo que tem a seguinte estrutura: Consiste de uma base retangular ou circular sobre a qual estão três pinos, e em um desses pinos são encaixadas sete discos de diâmetros decrescente a partir da base.

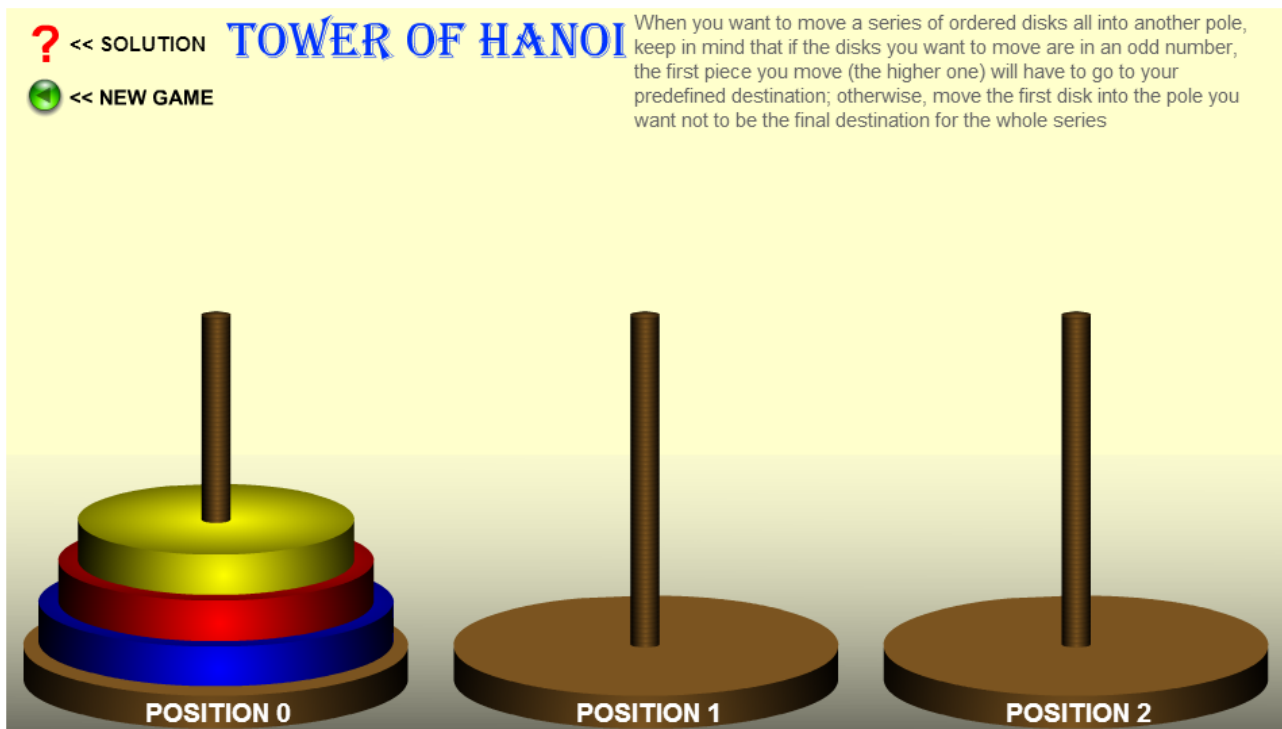


Figura 1: Torre de Hanói disponível em: <http://www.jogarjogogratis.com.br/jogos-classicos/torre-de-hanoi/> . (Acessado em 06/06/2017)

### Regras do Jogo

- ✓ Só pode movimentar uma peça por vez;
- ✓ Uma peça maior não pode ficar sobre uma menor;
- ✓ As peças devem estar sempre numa das três hastes, ou em movimento.

### Objetivos

- ✓ Determinar uma estratégia para movimentar as peças de uma torre para outra com o menor número de jogadas de acordo com as regras.
- ✓ Determinar o número mínimo de jogadas para movimentar as peças de uma torre para outra
- ✓ Construir um gráfico relacionando o número de peças com o número mínimo de jogadas para tirar todas as peças de uma torre para outra.
- ✓ Descobrir uma fórmula geral para o número mínimo de jogadas para qualquer quantidade de discos.
- ✓ Generalizar a fórmula para o número mínimo de jogadas



## Resultados e discussões

Na turma onde realizamos esse experimento é composta por quatro alunos na faixa de 19 a 21 anos onde chamaremos de A01, A02, A03 e A04. Inicialmente deixamos os alunos em contato com o jogo para se familiarizarem com as peças, isto é, deixarem os alunos brincarem livremente. Depois de ter feito isso é hora de introduzir as regras do jogo, que são:

- 1- Apenas um disco pode ser movimentado por vez;
- 2- Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor;
- 3- Não é permitido movimentar uma peça que esteja em baixo de outra e
- 4- Um disco deve estar sempre em um dos três pinos ou em movimento.

Então passamos a ver o andamento do jogo de acordo com as regras apresentadas. De início vamos pedir para que os alunos enumerem de 1, 2 e 3 as hastes da Torre de Hanói e pediremos para que eles transfiram um disco da haste 1 para a haste 3, depois com dois discos e assim por diante.

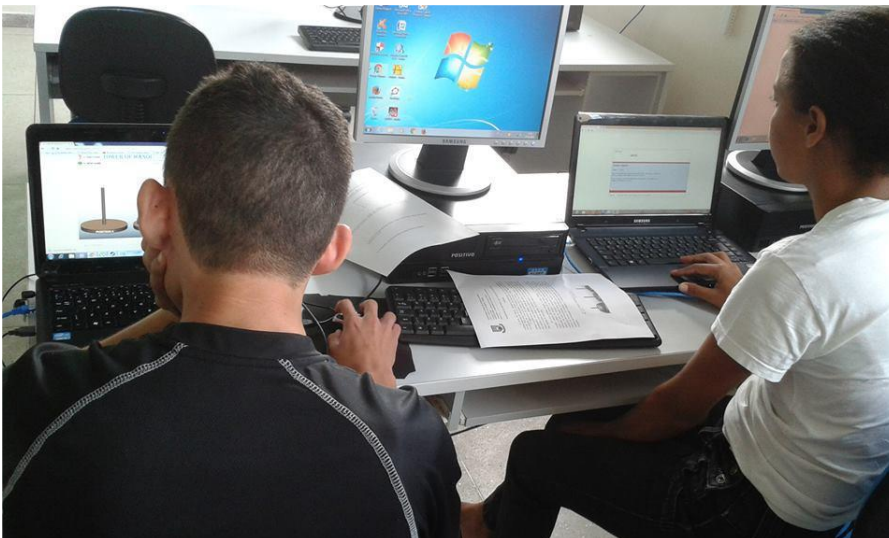


Figura 02: Alunos movimentando as peças da torre de Hanói virtual

Passando alguns minutos observando que os alunos já tinham um certo domínio do movimentos das peças do jogo. Perguntamos se eles sabiam quantos movimentos eles fizeram para transferir os discos de uma haste para outra. Todos disseram que não lembravam, assim pedi para que eles repetissem o processo registrando em uma tabela.

Ao termino dessa etapa percebemos que houve uma variação da quantidade de movimentos. Uns levaram mais jogadas e outros menos jogadas para transferir as peças de uma haste para outra. A partir daí começou um questionamento a respeito da quantidade de movimentos, e um dos questionamentos foi o seguinte: será que existe uma quantidade mínima de movimento para transferir os discos de uma haste para outra?

Nesse momentos os alunos começaram a movimentar as peças novamente com uma peça foi necessário uma jogada para transferir o disco de uma haste para outra. Com dois discos eles perceberam que precisavam de no mínimo três jogadas, com 3 discos precisavam de 7 jogadas. Assim eles começam a disser que sim que tinha um número mínimo de jogadas.

**Aluno 03:** Professor, usando a tabela que o senhor pediu para a gente construir eu observo que se parece com uma potência de base 2.

**Professor:** por que?

**Aluno 03:** Veja, se tenho um disco preciso de uma única jogada e se fizer  $2^1 = 2$ . se tenho dois discos vou precisar de no mínimo 3 jogadas e  $2^2 = 4$  se tenho três discos vou precisar de 7 jogadas e  $2^3 = 8$ . É como se fosse uma potencia de base 2 subtraindo 1.

**Professor:** Ótima observação. Isso é verdade se assemelha ao comportamento de uma potencia de base dois.

**Aluno 03:** Então dessa forma e usando a tabela

| Número de discos | Quantidade mínima de movimentos |
|------------------|---------------------------------|
| 1                | 1                               |
| 2                | 3                               |
| 3                | 7                               |
| 4                | 15                              |
| 5                | 31                              |
| 6                | 63                              |
| ...              | ...                             |

podemos encontrar o número mínimo de movimentos através dos números somados, veja:  $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 7 \Rightarrow 15 \Rightarrow 31 \Rightarrow 63, \dots$

Nesse momentos lancei o seguinte desafio aos alunos: Se você tivesse uma Torre de Hanói com 50 discos, qual seria o número de movimentos mínimos necessários para concluir o objetivo do jogo? Logo os alunos fizeram na calculadora  $2^{50} = 112589906842624$  e subtraíram 1 ficando 112589906842623, então esse número seria a quantidade mínima de movimento. Assim propus

outro desafio aos alunos: Agora tentem encontrar o termo geral dos movimentos mínimos necessários para n discos. Quase de imediato eles fizeram o seguinte esquema:

| Número de discos | Quantidade mínima de movimentos | Número somado |
|------------------|---------------------------------|---------------|
| 1                | 1                               | 2-1           |
| 2                | 3                               | 4-1           |
| 3                | 7                               | 8-1           |
| 4                | 15                              | 16-1          |
| 5                | 31                              | 32-1          |
| 6                | 63                              | 64-1          |
| ...              | ...                             | ...           |

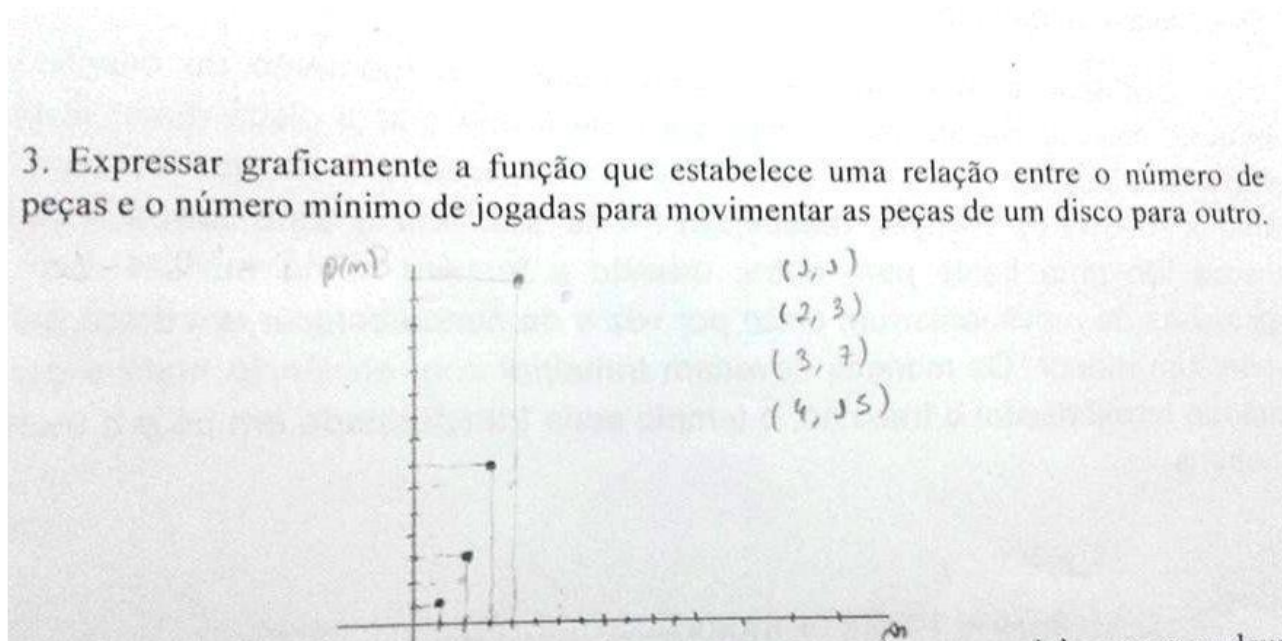


Figura 03: Gráfico construído por um aluno

Veja que o número somado é do tipo  $2^n$ , e assim a sequência de números somados forma uma PG: (2, 4, 8, 16, 32, ...), onde a razão é  $q=2$ . Logo o termo geral dos movimentos mínimos necessários para atingir o objetivo do jogo é:  $2^n-1$ . Então descobrimos que  $T(n)=2^n-1$

Em seguida foi solicitado aos alunos que expressassem graficamente a função que estabelece uma relação entre o número de peças e o número mínimo de jogadas para movimentar as peças de um disco para o outro.

De modo geral os alunos conseguiram construir o gráfico só que de forma equivocada. Pois ao construir o gráfico eles estavam ligando os pontos. E como estamos trabalhando unicamente com



números positivos não temos  $\frac{1}{2}$  de uma peça ou  $\frac{1}{8}$  de uma peça, e sim peças inteiras. Assim não se pode ligar os pontos do gráfico formado.

Feito essa etapa foi pedido aos alunos que eles provassem a fórmula encontrada. Mas apenas um aluno conseguiu provar por indução a fórmula.

**Professor:** Conseguiram provar a fórmula que vocês encontraram?

**Aluno 01:** Não professor é muito complicado!

**Professor:** É não, vamos pensar um pouco. Que tipo de demonstração vocês acham que seria o mais adequado para podemos provar essa fórmula?

**Aluno 03:** Acho que indução seria o melhor caminho.

**Aluna 04:** acho que por absurdo seria melhor.

**Professor:** Pronto, já temos dois caminhos que vocês acham possível, agora tentem demonstrar usando uma dessas opções.

**Aluno 04:** Acho que por absurdo não sai. Não estou conseguindo chegar a uma contradição.

**Aluno 03:** Eu consegui.

**Aluno 01:** Como você conseguiu?

**Aluno 03:** Eu provei para  $n=1$  e foi verdade. Supus verdadeiro para  $n=k$  e provei que era verdade para  $n= k+1$ . **Aluno 01:** ahhhh... Verdade sai fácil por indução.

(Transcrição da fala em sala de aula)

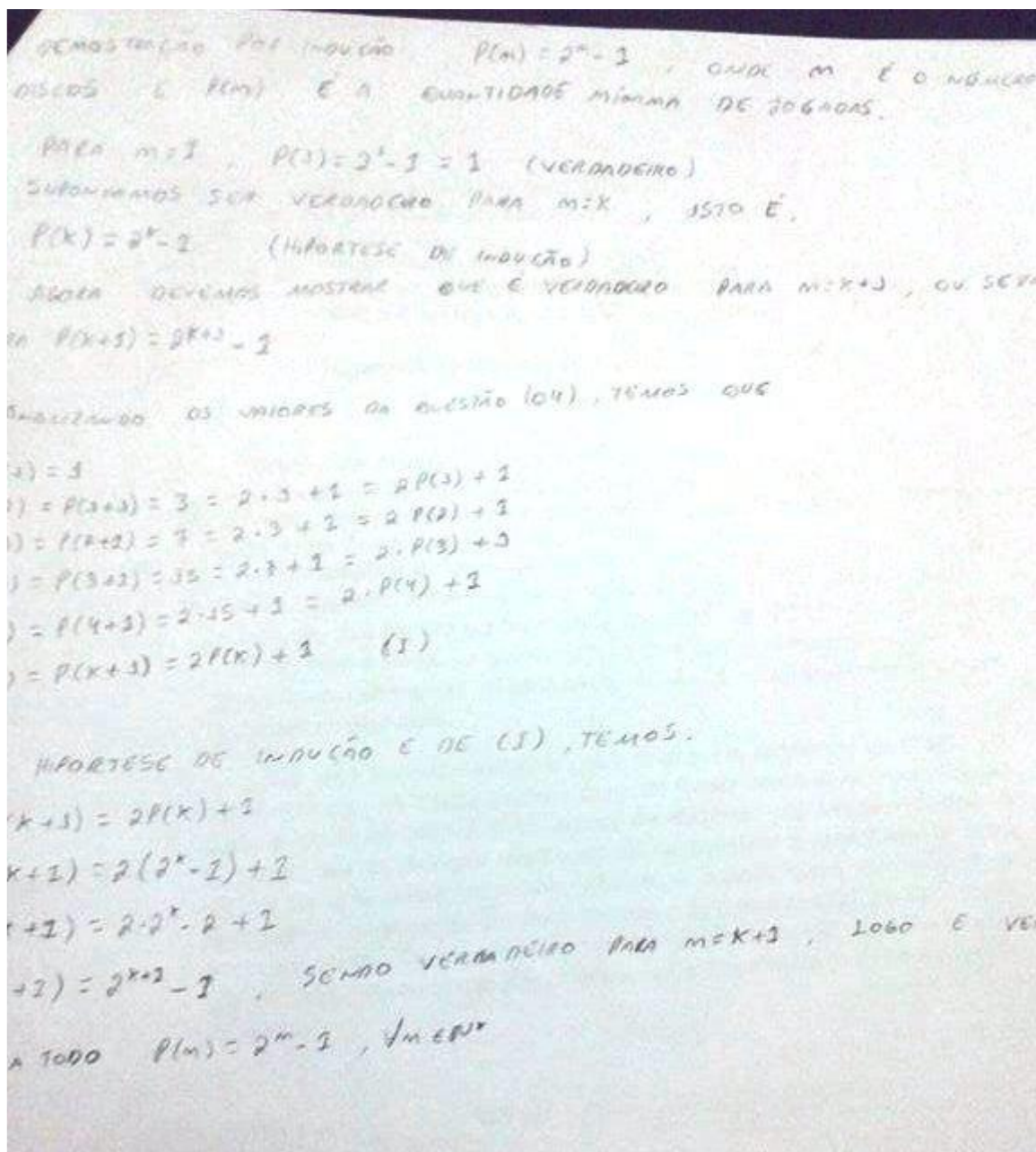


Figura: 04: Demonstração feito pelo aluno 03

#### 4.0 Conclusão

Devemos entender que a utilização das TIC não deve ser vista apenas como um momento recreativo que possa tornar uma aula mais divertida ou diferente, as TIC devem ser bem mais do que isso. Seu uso deve estar voltado para o ensino-aprendizagem, baseado numa proposta de construção de conhecimentos e resolução de problemas, extraindo de suas atividades, momentos em que o aluno possa refletir e perceber uma ideia relativa ao conhecimento matemático.

Mesmo que para alguns professores, as TIC em sala de aula represente deixar de fazer Matemática ou que represente uma brincadeira para distrair os alunos, para nós o uso de jogos e/ou

materiais didáticos de manipulação nas aulas de Matemática corresponde a uma atividade séria e que exige um planejamento bem elaborado, pois pode contribuir para o ensino-aprendizagem na sala de aula.

Quando isto acontece ganha o professor por diversificar seu planejamento pedagógico, obtendo resultados positivos e fazendo com que os alunos encontrem um elemento motivador através de uma abordagem didática que os estimulem a refletir sobre o que estão jogando e/ou produzindo, no caso do jogo ou do uso de material didático de manipulação. Identificando no olhar e nos comentários de seus alunos o prazer da descoberta ou do desafio, desta forma ganha o aluno por ter se envolvido com atividades que o fizeram pensar um pouco mais e construir conceitos matemáticos, desenvolvendo habilidades que lhes serão úteis.

E quando houver dificuldades em alguns momentos da atividade, que possam discutir ou colocar seus pontos de vista encontrando soluções juntamente com seu grupo, pois é o aluno quem controla seu ritmo, seu tempo de pensar e de aprender sendo o professor um mediador do processo de aprendizagem.

Um outro aspecto muito importante observado foi a interação dos envolvidos na atividade, todos os alunos se mostram muito entusiasmado em esta participando e querendo resolver os desafios que eram propostos.

## **Bibliografia**

BARROS, R. J. A. do. **A Utilização Dos Jogos na Aprendizagem de Indução Finita no Ensino Superior**. 2011. Dissertação (mestrado) em Educação – Universidade Federal do Pernambuco – UFPE, Recife. 2011.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamentação** – Brasília, DF: MEC/ SEF, 1998.

Fadel, L. M. Et al. **Gamificação**. 1ed. São Paulo – SP. Pimenta Cultural, 2014. 300p