ANÁLISE DO NÍVEL DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO SEGUNDO A TEORIA DE VAN HIELE DOS ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Professor: Anderson de Araújo Nascimento
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), anderson_mat@hotmail.com

Professor: Marconi Coelho dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), marconicoelho@hotmail.com

Professora: Marcella Luanna da Silva Lima
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), marcellaluanna@hotmail.com

Orientadora: Abigail Fregni Lins
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Bibilins2000@yahoo.co.uk

RESUMO

Diante da lacuna existente no tema Provas e Demonstrações Matemáticas na Educação Básica, evidenciadas pela literatura, esta pesquisa vem analisar as justificativas de dezenove alunos de uma escola pública da rede estadual da Paraíba da cidade de Areia, divididos em oito duplas e um trio via aplicação de uma proposta didática a uma turma do 1º ano do ensino médio com o objetivo de classificar os grupos participantes segundo os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e de qual tipo de prova segundo Balacheef mais foram usadas pelos alunos para responder as atividades propostas. Com isso pretendemos incentivar novas pesquisas sobre o tema abordado e ao mesmo tempo contribuir para que essa temática possa ser inserida nas aulas de matemática da educação básica. Concluiu-se que a utilização dos níveis de Van Hiele para caracterização do nível de aprendizado dos conceitos geométricos dos grupos ajudou a identificar que uma dupla conseguiu atingir o nível três de Van Hiele e que a justificativa mais utilizada por esse grupo foi o Exemplo Genérico de Balacheff. Essas duas teorias foram uteis para diagnosticar em que estágio do aprendizado dos conceitos geométricos os alunos encontravam-se para daí poder planejar estratégias metodológicas e didáticas para que os alunos que não alcançaram aprendizado mínimo sobre o assunto possam atingi-lo mediante atividades que os auxilie a avançar nos níveis de Van Hiele e por consequência aprender os conceitos geométricos propostos.

Palavras-chave: Educação Matemática; Pensamento Matemático; Teoria de Van Hiele; Geometria; Provas e Demonstrações.

INTRODUÇÃO

Este artigo é fruto de uma pesquisa do grupo Provas e Demonstrações Matemáticas, polo UEPB, do projeto da CAPES o OBEDUC em rede com as instituições Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade

Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL) que tem como objetivo inserir o tema Provas e Demonstrações no cotidiano das aulas de matemática no Ensino Básico com o intuito de promover o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

Esta temática sobre a utilização de Provas e Demonstrações foi escolhida por percebemos diante da revisão da literatura que há uma lacuna sobre este tema nas aulas de matemática na educação básica como mencionam (ALMOULOUD 2007, NASSER e TINOCO 2003).

A formação inicial ou continuada do professor de matemática deve abordar o conhecimento da demonstração tanto na matemática como ciência quanto no ensino e na aprendizagem da matemática em sala de aula na educação básica, contribuindo assim para o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno DIAS (2009).

Pesquisas apontam que o assunto tratado acima é pouco abordado sobre o tema da demonstração em Matemática, fazendo com que o futuro professor não esteja preparado a desempenhar em sala de aula atividades que promovam o pensamento matemático dos seus alunos (GRAVINA 2001; PIETROPAOLO 2005).

Com o intuito de tornar nosso aluno um cidadão crítico como menciona os PCN (BRASIL, 1998) vemos no tema provas e demonstrações um caminho que possa levar os alunos a justificar suas posições, resultados, ideias, pontos de vista e levantar hipóteses; situações essas que podem tornar acessíveis o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno e sua independência intelectual em nossa sociedade.

Assim com o objetivo de analisar em que estágio do desenvolvimento do pensamento geométrico matemático os alunos desta pesquisa se encontram utilizou-se a Teoria de Van Hiele. Teoria essa que teve origem nas respectivas teses de doutoramento de Dina Van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre Van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. A principal característica da teoria é a distinção de cinco diferentes níveis de pensamento com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca da geometria (VILLIERS, 2010):

Nível 1: reconhecimento

Os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente.

Nível 2: análise

Os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades das mesmas.

Nível 3: Dedução Informal

Os alunos realizam a ordenação lógica das propriedades de figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre as figuras (por exemplo, inclusões de classe).

Nível 4: dedução

Os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas.

Nível 5: rigor

Neste estágio, o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, podem-se estudar geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. A geometria é vista no plano abstrato.

Agora ao saber da existência dessa teoria nossa tarefa é desenvolver atividades que possibilitem que os alunos dissertem sobre suas respostas diante de questões que abordem temas sobre o assunto de geometria para que diante de suas justificativas possamos classifica-los em um dos níveis da teoria de Van Hiele com a intenção de sabermos qual o nível de conhecimento adquiro sobre o assunto, para que estratégias possam ser elaboradas para leva-lo a um nível posterior e por seguinte melhorar sua aprendizagem e o ensino sobre conceitos geométricos (NASSER e SANT'ANNA 2010).

Outro aspecto importante é como analisar as justificativas dadas pelos alunos diante das atividades propostas, pois, é comum encontrar nas respostas dos alunos a preferência por provas ingênuas, informais, com destaque para aquelas que recorrem a exemplos, aplicação de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos utilizados sem o devido entendimento conceitual (AGUILAR e NASSER 2012).

Diante disso, Balacheff (1988), traz-nos alguns tipos de provas que ajudam na análise das justificativas dadas pelos alunos:

- *Empirismo ingênuo*: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização.
- *Experimento Crucial*: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar.
- *Exemplo Genérico*: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixa-los com uma característica que representa uma classe de objetos.
- *Experimento de pensamento*: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.

Apesar de pesquisas como a de Pietropaolo (2005, p.49) que consideram provas e demonstrações palavras sinônimas, preferiu-se adotar para nossa pesquisa a diferença entre as palavras citadas anteriormente como consta em Balacheff (1982):

- *Explicação*: consiste de uma argumentação em que o interlocutor deseja exprimir a outrem a validade de um resultado matemático.
- *Prova*: quando a explicação apresentada é reconhecida pela comunidade.
- *Demonstração*: é uma sequência de enunciados previamente conhecidos e aceitos pela comunidade como verdadeiros. Nesta sequência de enunciados, há um encadeamento lógico, segundo uma regra dedutiva. Estes enunciados são os axiomas, os teoremas, propriedades e proposições previamente "demonstradas".

Por fim, este artigo têm a intenção de mostrar que é possível identificar em que estágio se encontra o aluno em seu conhecimento em relação aos conceitos geométricos e diante dos resultados criar estratégias metodológicas e didáticas para a melhoria do ensino e aprendizagem da geometria utilizando provas e demonstrações matemáticas em sala de aula.

METODOLOGIA

Nesta pesquisa utilizou-se Moreira e Caleffe (2008), Bogdan e Biklen (1994) e Moroz e Gianfaldoni (2006) como fundamentação teórica para realização da coleta com métodos qualitativos, isto é, elaborou-se uma proposta didática composta por treze questões divididas em três partes onde a primeira parte é composta por oito questões abordando o teorema de Pitágoras, na segunda parte por três questões abordando o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer e na terceira parte composta por duas questões envolvendo o teorema do ângulo externo de um triângulo qualquer. Essa proposta didática foi aplicada a uma turma do primeiro ano do ensino médio da Educação Básica com dezenove alunos divididos em oito duplas e um trio com o objetivo de analisar o pensamento matemático dissertado pelos grupos de alunos. Para analise neste artigo escolheu-se uma questão da segunda parte e uma questão da terceira parte da proposta didática:

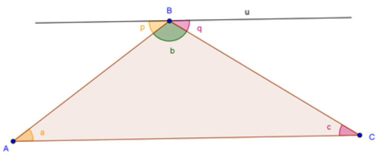
UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA
DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Dupla: ____ **Série:** ________
____ **Data:** ______/_______/_______

PARTE II

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\hat{A}C$*?*
b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?
c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:
(   ) $p + b + q = 180°$
(   ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c
(   ) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

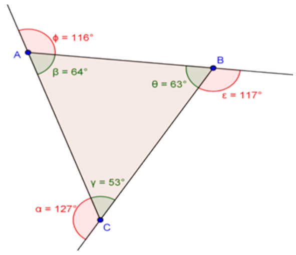
(   ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$
(   ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

PARTE III

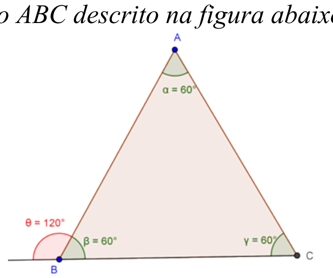
(2) (nossa autoria) Nas alternativas I, II, III, marquem qual delas vocês descreveriam como demonstração do teorema do ângulo externo, descrito na Questão 1. Ao final, justifiquem sua escolha.

I (   ) Dado um triângulo qualquer ABC e sejam $\beta = 64^o$, $\theta = 63^o$ e $Y = 53^o$,as medidas dos ângulos. Como descrito na figura abaixo:



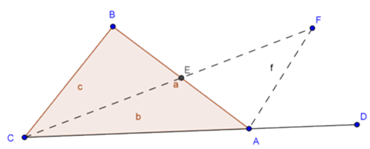
Observem:
Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{BC}$ formaremos o ângulo α, onde $\alpha = 127^o$.
Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{CA}$ formaremos o ângulo Φ, onde $\Phi = 116^o$.
Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{AB}$ formaremos o ângulo ε, onde $\varepsilon = 117^o$.
Note que, $\alpha >$ C$\hat{A}$B e A$\hat{B}$C, assim como $\beta >$ A$\hat{B}$C e A$\hat{C}$B, assim como também $\theta >$ C$\hat{A}$B e A$\hat{B}$C, como queríamos demonstrar.

II (   ) Tomemos o triângulo equilátero ABC descrito na figura abaixo:



Como se trata de um triângulo equilátero, sabemos que o ângulo B$\hat{C}$A = C$\hat{A}$B = A$\hat{B}$C = 60º. Ao prologarmos a semirreta $\overrightarrow{BC}$ formaremos o ângulo θ, que mede 120º, além disso, note que, $\theta = 120^o > 60^o$ = B$\hat{C}$A = C$\hat{A}$B = A$\hat{B}$C. Logo fica demonstrado o teorema.

III (   ) Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overrightarrow{CA}$, marque um ponto D tal que o ponto A esteja entre os pontos C e D, como indicado na figura abaixo:
Queremos provar que o ângulo BÂD > $\hat{B}$ e BÂD > $\hat{C}$. Vamos primeiro provar que o ângulo BÂD > $\hat{B}$. Para isto consideremos o ponto médio E do segmento $\overline{AB}$.



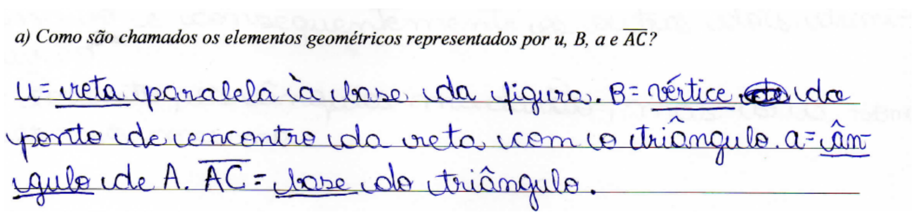
Na semirreta $\overrightarrow{CE}$ marque um ponto F tal que, o segmento $\overline{CE} = \overline{EF}$. Trace $\overrightarrow{AF}$. Compare os triângulos CEB e FAE. Como $\overline{BE} = \overline{AE}$ (já que E é ponto médio de AB), $\overline{CE} = \overline{EF}$ (por construção) e BÊC = AÊF (por serem opostos pelo vértice), segue-se que o ângulo BÊC = AÊF. Consequentemente $\hat{B}$=EÂF, como a semirreta $\overrightarrow{AF}$ divide o ângulo BÂD, então EÂF < BÂD, portanto $\hat{B}$ < BÂD. Analogamente provamos que BÂD > C. Assim fica demonstrado o teorema.

Justifiquem a escolha:

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na análise das duas questões levaram-se em consideração os níveis de Van Hiele para identificar em que nível do pensamento geométrico os alunos se encontravam e para as justificativas das questões dissertativas procurou-se identificar em qual tipo de provas definidas por Balacheff (1998) os alunos tentaram justificar suas respostas.

Ao analisar a questão três da Parte II observou-se para o item (a) que apenas uma dupla conseguiu responder corretamente:

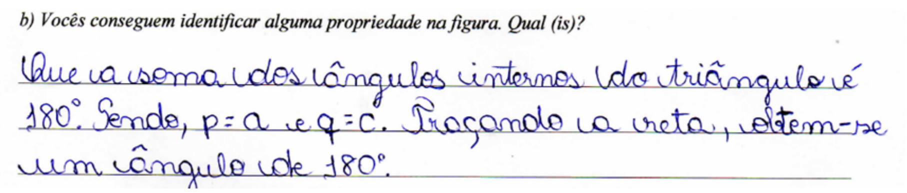

a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

u= reta paralela à base da figura. B= vértice do ponto de encontro da reta com o triângulo. a= ângulo de A. $\overline{AC}$= base do triângulo.

Figura 1: justificativa dada por uma dupla em relação ao item (a) da questão 3 parte II

Essa resposta satisfaz o nível um de Van Hiele por caracterizar que a dupla conseguiu reconhecer os elementos geométricos presentes no triângulo.

Ao analisar a questão três da Parte II encontrou-se para o item (b) que apenas uma dupla conseguiu responder parcialmente:


b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

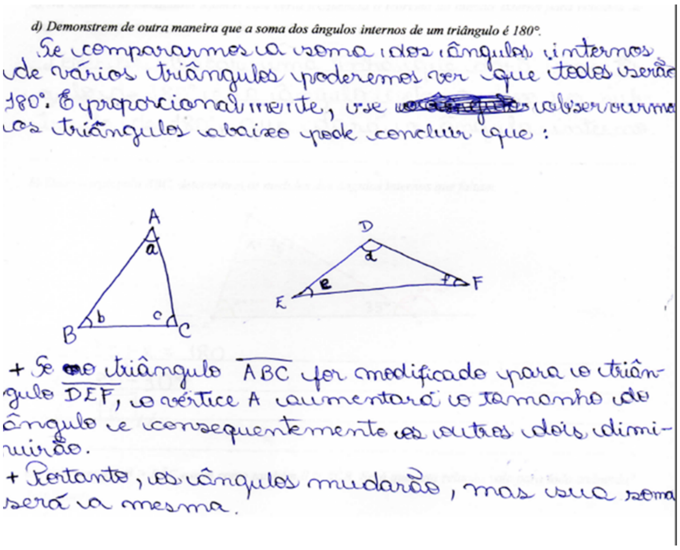
Que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°. Sendo, p= a e q= c. Traçando a reta, obtem-se um ângulo de 180°.

Figura 2: Justificativa dada por uma dupla em relação ao item (b) da questão 3 Parte II

Esta reposta evidencia que a dupla conseguiu perceber uma propriedade do triângulo, situação essa que indica que o aluno pode está no nível dois da Teoria de Van Hiele.

Agora ao analisar a questão três da parte II item (c) encontrou-se que duas duplas conseguiram ordenar de forma correta a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo. Esta situação indica que essas duplas podem está no nível três de Van Hiele por terem conseguido realizar a ordenação lógica do teorema proposto.

Para finalizar essa questão três da parte II observaram-se as justificativas dadas pelos alunos no item (d) e verificamos que nenhuma dupla conseguiu demonstrar o teorema proposto mais uma das duplas tentou demonstrar da seguinte maneira:


d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Se compararmos a soma dos ângulos internos de vários triângulos poderemos ver que todos serão 180°. E proporcionalmente, se observarmos os triângulos abaixo pode concluir que:

+ Se o triângulo $\overline{ABC}$ for modificado para o triângulo $\overline{DEF}$, o vértice A aumentará o tamanho do ângulo e consequentemente os outros dois diminuirão.

+ Portanto, os ângulos mudarão, mas sua soma será a mesma.

Figura 3: Justificativa dada por uma dupla em relação ao item (d) da questão 3 Parte II

Percebeu-se que a dupla tentou provar esse teorema pelo Empirismo Genérico definido por Balacheff (1998) em que os alunos se basearam em alguns exemplos em que esse teorema funcionou e concluíram que vale para todos os triângulos. Nesta questão ficou caracterizado que nenhum aluno está no nível quatro de Van Hiele.

Em seguida passou-se para análise da questão dois da parte III em que foi pedido que fosse escolhido qual seria a demonstração do teorema do ângulo externo e ao final justificasse sua escolha. Nesta questão nenhum aluno conseguiu acertar a demonstração correta para este teorema. O que evidencia que os alunos não estão no nível cinco da Teoria de Van Hiele.

A seguir o gráfico expõe o percentual de duplas por nível de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo Van Hiele identificados nesta pesquisa.

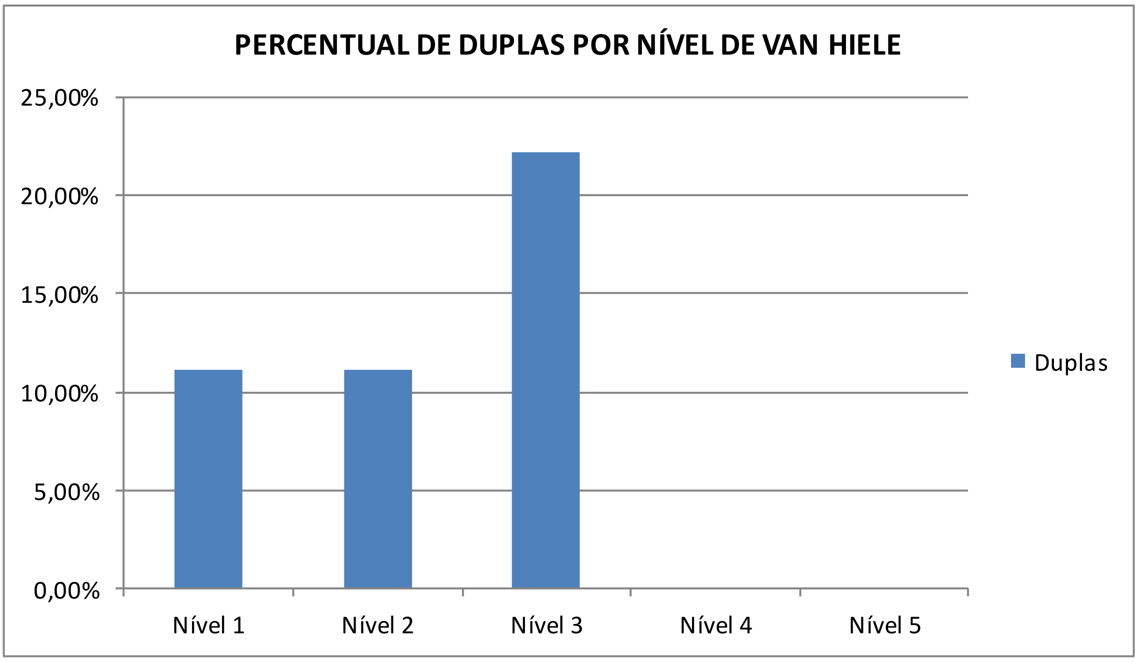


Gráfico 1: Classificação das duplas por nível do pensamento geométrico segundo Van Hiele.
Fonte: autoria própria

O gráfico 1 mostra que 11,1% (uma dupla) das duplas estão no nível um e dois de Van Hiele. E que 22,2% (duas duplas) estão no nível três de Van Hiele enquanto que nenhuma dupla conseguiu atingir o nível quatro ou cinco de Van Hiele. O que pode indicar que os alunos participantes não tiveram contato com atividades que envolvesse provas e demonstrações em séries anteriores como pesquisas evidenciaram a lacuna existente sobre essa temática nas aulas de matemática na educação básica (ALMOULOUD, 2007; NASSER e TINOCO, 2003).

CONCLUSÃO

Os resultados obtidos referentes aos níveis um e dois de Van Hiele podem ser considerados confiáveis, pois, a dupla que respondeu corretamente o item (a) também respondeu corretamente o item(b). Com relação ao item (c) duas duplas acertaram sendo que uma dessas duplas foi a mesma que acertou os itens anteriores, portanto faz sentido dizer que uma dupla está realmente pertencente aos níveis mencionados. Apesar de a outra dupla ter acertado a ordem pedida no item (c) a falta de acertos nos itens anteriores evidência que essa dupla não está realmente no nível três. Assim pode-se concluir que apenas uma dupla conseguiu está no nível um, dois e três de Van Hiele.

Para o item (d) da questão três parte II apesar de ninguém ter acertado notou-se que a dupla que conseguiu atingir o nível três de Van Hiele utilizou o tipo de prova Exemplo Genérico para demonstrar o teorema proposto no item em questão, o qual confirma o que pesquisas já apontaram, ou seja, que alunos da educação básica utilizam justificativas informais, com destaque para aquelas que recorrem a exemplos ou provas ingênuas para justificar suas demonstrações.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JUNIOR, C. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e Argumentação Matemática de Alunos do Ensino Fundamental. *Vidya*. v. 32, nº 2, p. 133-147, 2012. Disponível em http://sites.unifra.br/Portals/35/2012/09.pdf. Acesso em 30/09/2014

ALMOULOUD, S. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem**. Grupo de Educação Matemática GT 19. 2007. Disponívelemhttp://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova .pdf. Acessado em 09 de junho de 2014.

BALACHEFF, N. (1982): **Preuve et démonstration mathématique au college. Recherches en didactique des mathématiques** 3 (3) 261-304. La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, França.

_______________.(1988): Aspects of proof in pupils´ pratice of school mathematics. In: PIMM, D. (ed.), Mathematics, teachers and children, pp. 216-235, Hodder & Stoughton, Londres, Inglaterra,1988.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métod**os. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: **Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico.** Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001 .

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele. 2 ed. Ver. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

NASSER, L. e TINOCO, L. A. **Argumentação e provas no ensino da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFJ/Projeto Fundão, 2003.

MOREIRA, H. e CALEFFE, L. G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MOROZ, M. e GIANFALDONI, M. H. T. A. **O processo de pesquisa: iniciação**. 2. Ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2006

PIETROPAOLO, R. C. *(***Re) Signifcar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica**. Tese de Doutorado. PUC – São Paulo, 2005.

VILLIERS, M. **Some reflections on the Van Hiele Theory**. Revista Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, volume 12, número 3, pp. 400-431, 2010.