ELABORANDO SABERES MATEMÁTICOS PARA CONJECTURAR O TEOREMA DE PITÁGORAS

Marconi Coelho dos Santos

Universidade Estadual da Paraíba – marconicoelho@hotmail.com

Anderson de Araújo Nascimento

Universidade Estadual da Paraíba – anderson_mat@hotmail.com

Marcella Luana da Silva Lima

Universidade Estadual da Paraíba – marcellaluanna@hotmail.com

Helder Flaubert Lopes de Macedo

Universidade Estadual da Paraíba – helderflm@gmail.com

Abigail Fregni Lins

Universidade Estadual da Paraíba – bibilins@gmail.com

Resumo: Este artigo foi desenvolvido através das pesquisas realizadas pela equipe Provas e Demonstrações Matemáticas que está inserida no Projeto Observatório da Educação (OBEDUC). Este projeto envolve de forma colaborativa as instituições Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL), a equipe Provas e Demonstrações Matemática é uma das equipes da UEPB. Esta equipe é responsável por estudar a utilização de provas e demonstrações no ensino e aprendizagem da Matemática no ensino básico. Nesta perspectiva evidenciamos alguns resultados sobre o Teorema de Pitágoras que foram obtidos através da aplicação de uma proposta didática a alunos do 3º ano do ensino médio em uma escola publica estadual na cidade de Areia Paraíba. Iniciamos pela literatura que enfatiza o Teorema de Pitágoras como uma importante ferramenta matemática em seguida abordamos os resultados obtidos através das respostas desenvolvidas pelas duplas envolvidas nas pesquisas, as respostas foram escaneadas e expostas do modo como foram escritas pelas duplas. Os resultados da pesquisa mostram que os alunos detêm um conhecimento superficial sobre o tema investigado. Com isso, concluímos que o aprendizado do Teorema de Pitágoras não está permitindo condições para alicerçar a construção do conhecimento matemático, o que mostra a importância desta pesquisa.

Palavras-Chave: OBEDUC, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CONHECIMENTO MATEMÁTICO, TEOREMA DE PITÁGORAS.

INTRODUÇÃO

Na Matemática, de um modo geral, nenhum outro Teorema é tão conhecido e demonstrado como o Teorema de Pitágoras. Esta afirmação matemática que relaciona os lados de um triângulo retângulo já era conhecida pelos povos egípcios e babilônios cerca de mil anos antes de Pitágoras, mas Pitágoras pode ter sido o primeiro a provar sua veracidade (EVES, 2008).

A partir de então este Teorema leva o nome de Pitágoras e se faz presente nas aulas de Matemática da educação básica e superior. O Teorema de Pitágoras é de grande utilidade tanto na resolução de problemas de agrimensura, arquitetura e engenharia podendo ser utilizado como um primeiro passo para a abstração e desenvolvimento do raciocínio dedutivo além de propor várias possibilidade de demonstração (CONTE, 2010).

Na educação básica acreditamos que a utilização do Teorema de Pitágoras pode ser um passo importante para ser trabalhado com o objetivo de mostrar aos alunos o significado de um teorema e de uma prova ou demonstração. Este Teorema possui o maior número de demonstrações, apresenta mais de trezentas demonstrações ficando a cargo do professor selecionar a que melhor se adapte ao nível de ensino e aprendizagem que pretende atingir (BARBOSA, 1993).

Estudos realizados por Santos e Lins (2012) e Santos e Lins (2013a e 2013b), detectaram que a metade dos professores pesquisados conhece apenas uma das diversas demonstrações existentes sobre o Teorema de Pitágoras, a demosntração baseada em semelhanças de triângulos. Constatamos também o uso apenas do quadro como recurso utilizado para trabalhar a demonstração trazida pelo Livro. De acordo com Lima et al (2006) a demonstração através de semelhança de triângulos talvez seja a demonstração mais presentes nos livros didático e a mais utilizadas nas aulas de Matemática. Na visão de Barbosa (1993), este tipo de demonstração é uma demonstração tradicional presente em livros sem preocupação educacional.

O Teorema de Pitágoras é estudado desde o 9º ano da educação básica e está presente em alguns conteúdos do ensino médio, então será que os alunos do 3º ano do ensino médio conseguem perceber quando o Teorema de Pitágoras está presente nas atividades? Neste caminhar, desenvolvemos este artigo com o objetivo diagnosticar o conhecimento matemático dos alunos em relação ao Teorema de Pitágoras.

METODOLOGIA

Elaborou-se uma proposta didática dividida em quatro partes. A parte 1 é composta de 7 atividades, a parte 2 é composta de 4 atividades, na parte 3 tínhamos 2 atividades e na ultima parte, parte 4 composta por 5 atividades. Para a elaboração deste artigo analisamos três atividades da parte 1 da proposta didática, as questões 3, 4 e 5. A proposta didática foi aplicada em uma escola publica estadual na cidade de Areia Paraíba a uma turma de 3º ano do Ensino Médio a qual foi dividida em 10 duplas e um trio. As questões foram sistematizadas focando o processo de conjectura do Teorema de Pitágoras de forma que os alunos fossem conduzidos a perceber a relação entre as atividades e entre o Teorema de Pitágoras.

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	Cateto b	Hipotenusa c	Área A	Área B	Área C
3	**4**	**5**			
6	**8**	**10**			
5	**12**	**13**			
9	**12**	**15**			

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

(4) (extraído de Bastian, 2000)

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro, identificando seus referidos lados como a, b e c.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho igual ao lado *a* (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *b* (pinte de amarelo)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho
- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelos e verdes
- ✓ Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?
- ✓ Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

5) (extraído de Bastian, 2000)

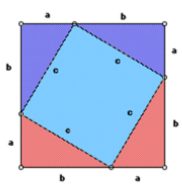


Figura 1

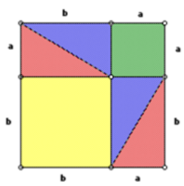


Figura 2

a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

b) Façam o mesmo na Figura 2.

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

Figura 1: Atividades 3 4 e 5 utilizadas na elaboração deste artigo.
Fonte: Bastian 2000

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Atividade 3:

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	Cateto b	Hipotenusa c	Área A	Área B	Área C
3	4	5			
6	8	10			
5	12	13			
9	12	15			

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

Figura 2: Atividade 3.

A atividade 3 foi elaborada para que as duplas calculem as áreas dos quadrados de acordo com as informações dadas e que consigam relacionar estes resultados enxergando que em todos os casos somando-se os resultados encontrados para a área A com os resultados encontrados para a área B é igual aos resultados encontrados para a área C e consigam fazer um paralelo entre esses resultados e o Teorema de Pitágoras.

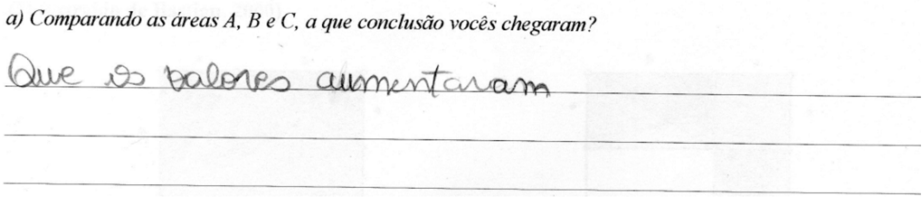
Das dez duplas e o trio que foram participantes da pesquisa apenas três duplas conseguiram realizar os cálculos corretamente e nenhuma observou corretamente a relação existente entre os cálculos das áreas A, B e C. Vejamos alguns resultados:

Quando questionados qual era a relação existente entre as áreas A, B e C obtivemos diversas respostas:

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

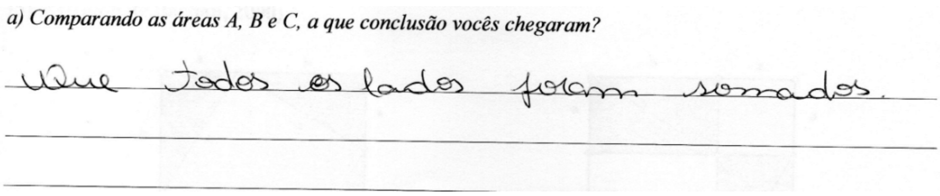
Chegamos a conclusão, que se formássemos um triângulo com a soma das áreas obtidos, esse triângulo seria escaleno onde todos seus lados são diferentes (Porque a soma das áreas são diferente

Figura 3. Resposta de uma as duplas pesquisas
Fonte: Dados obtidos na pesquisa


a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

Que os valores aumentaram

Figura 4. Resposta do item *a* de uma as duplas pesquisadas
Fonte: Dados obtidos na pesquisa


a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

Que todos os lados foram somados.

Figura 5. Outra resposta para item *a* de uma das duplas pesquisas
Fonte: Dados obtidos na pesquisa

Os dados mostram que os participantes da pesquisa não visualizam o Teorema de Pitágoras quando o mesmo não aparece explicitamente através da fórmula $a^2 = b^2 + c^2$.

Atividade 4

(4) (extraído de Bastian, 2000)

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro, identificando seus referidos lados como a, b e c.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho igual ao lado *a* (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *b* (pinte de amarelo)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho
- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelos e verdes
- ✓ Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?
- ✓ Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

Figura 6: Atividade 4.

Na atividade 4 pretendíamos que após a construção por parte dos alunos, as duplas conseguissem visualizar o que acontece com as áreas de ambos os "quadradões" após serem retiras as peças determinas nos item "c". Que os alunos tenham o maior envolvimento na resolução desta atividade devido ao fato de que é uma atividade que precisa da participação dos alunos para construir o material necessário para a montagem da questão. Que após a construção e montagem do quebra-cabeça, os alunos cheguem a perceber a relação existente entre as figuras.

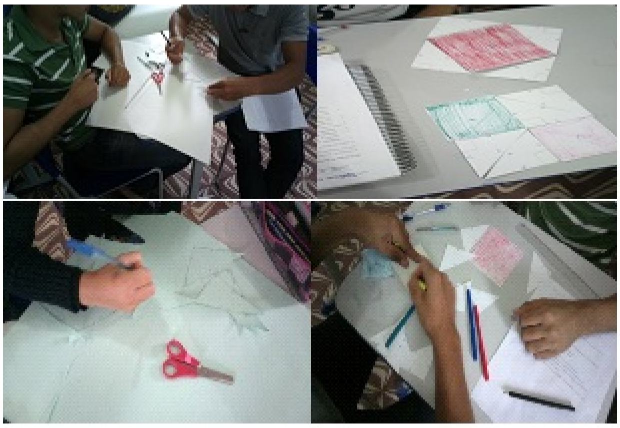


Figura 7: As duplas de alunos recortando e montando o quebra-cabeça.
Fonte: Própria.

Após a montagem do quebra-cabeça foi perguntado: *Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?* A resposta foi a seguinte:

Sim. Podemos descreve-la da seguinte maneira: subtende-se que a area dos quadrado sera igual a soma dos dois quadrados menores.

Figura 8: Descrição feita por uma das duplas pesquisadas para explicitar a relação existente na atividade 4
Fonte: Dados obtidos na pesquisa

Com a formação dos triangulos, junto com os quadrados formaram dois quadrado de tamanhos iguais. Vai existir uma relação iguais pois a area dos quadrados eram do mesmo tamanho.

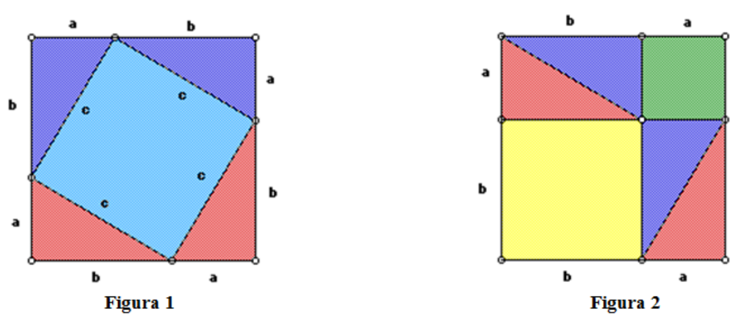
Figura 9: Descrição feita por outra dupla envolvida na pesquisa para explicitar a relação existente na atividade 4
Fonte: Dados obtidos na pesquisa

Para Brasil (1998), a partir da observação de material concreto é possível caminhar através de conjecturas que enveredem para a formalidade dos elementos matemáticos. Experiências deste tipo proporcionam aos alunos momentos de descobertas através da tentativa e erro e também através de observações realizadas no desenvolver das tarefas. De acordo com Bastian (2000, p. 128), "com esta atividade torna-se possível reinvestir em tópicos que deveriam fazer parte dos conhecimentos disponíveis do aluno e, ao mesmo tempo, evidenciar a importância de um tratamento mais rigoroso".

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 44), “numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca”. Os PCN (BRASIL, 1998) também destacam a utilização de materiais concretos pelos professores como um recurso alternativo que pode tornar bastante significativo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Atividade 5:

5) (extraído de Bastian, 2000)



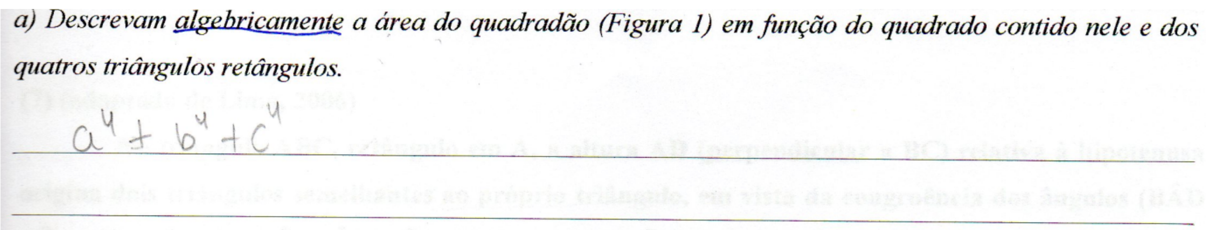
a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

b) Façam o mesmo na Figura 2.

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

Figura 10: Atividade 5.

A atividade 5 foi elaborada para que os alunos formalizem de forma mais rigorosa os dados obtidos na atividade 3 e 4.



a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

$a^4 + b^4 + c^4$

Figura 11: Resposta atribuída para o item *a* por uma das duplas pesquisadas
Fonte: Dados obtidos na pesquisa

Como resultado da atividade 5 todas as duplas que fizeram parte da pesquisa deixaram esta atividade em branco, apenas uma dupla na tentativa de responder o item *a* escreveu $a^4 + b^4 + c^4$. Esta situação parece estar coligada à costumeira metodologia utilizada para ensinar o Teorema de Pitágoras (LORENZATO, 1993), isto é, uma metodologia resumida apenas ao uso da fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, o que não faz nenhum sentido para o aluno e não possibilita a compreensão do enunciado do Teorema. A dificuldade em visualizar e trabalhar com conceitos de álgebra é oriundo da metodologia do professor em suas aulas optar por privilegiar os conteúdos aritméticos. Ministra conteúdos algébricos de forma a enfatizar a memorização de fórmulas e regras a serem utilizadas em resolução de expressões algébricas (MIGUEL, FIORENTINI E MIORIM, 1992).

As duplas envolvidas na pesquisa não conseguiram identificar a relação entre as áreas das Figuras 1 e 2 o que nos mostra a falta de observação para perceber que as Figuras deveriam ser analisadas com um olhar na parte e não no todo, que de acordo com Bastian (2000), isto acontece devido ao contrato didático do professor em que o aluno não consegue visualizar e analisar parte e todo, assim como a falta de compreensão de utilização de conceitos algébricos.

CONCLUSÕES

Analisando as atividades percebemos que os alunos não tem conhecimento suficiente para relacionar o Teorema de Pitágoras com outras atividades quando o mesmo não está escrito da forma $a^2 = b^2 + c^2$. Outro problema detectado é a dificuldade dos alunos em visualizar e entender as figuras geométricas, decompor essas figuras quando necessário e realizar operações algébricas.

Acreditávamos que possíveis problemas encontrados para resolver as atividades da proposta didática seriam minimizados pelo fato de que os alunos envolvidos na pesquisa cursavam o 3º ano do ensino médio.

Percebemos que em algumas situações as duplas pesquisadas perceberam corretamente que existia uma relação entre as figuras das atividades 4 e 5, mas não perceberam que podiam associar esta relação ao Teorema de Pitágoras.

Diante do exposto acreditamos que o modo como o Teorema de Pitágoras e trabalhando em sala de aula não está proporcionando meios para que a sua compreensão aconteça, não está auxiliando o aluno na construção do seu pensamento matemático.

Finalizamos acreditando que o discutido neste artigo venha a ser utilizado por professores de Matemática da educação básica como fonte norteadora às futuras práticas as quais contribuirão para uma aprendizagem matemática mais sólida e duradoura, assim como reforça a relevância da pesquisa de nossa equipe.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos.** São Paulo: Atual, 1993. 93p.

BASTIAN, I. V. **Teorema de Pitágoras**. 2000. 229 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1998.

CONTE, C. B. **Pitágoras: ciência e magia na Antiga Grécia**. São Paulo: Madras, 2010.

EVES, H. **História da geometria**. Tradução: Hygino H. D. São Paulo: Atual,1992.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, A. **Temas e Problemas Elementares.** 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 256p.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Brasília, ano 3, p.3-13, jan/jun.1995.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pró-Posições.** São Paulo: Cortez, v. 3, n.1[7], p. 39-54, mar. 1992.

SANTOS, M. C. e LINS, A. F. Demonstrações do Teorema de Pitágoras na Perspectiva do Professor de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2012, Campina Grande. **Anais eletrônicos...** Campina Grande: UEPB, 2012. Disponível em: http://editorarealize.com.br/ revistas/enect/trabalhos/ Comunicacao_529.pdf. Acesso em: 05 dez 2013.

SANTOS, M. C. e LINS, A. F. Pitágoras e as Demonstrações do seu Teorema na Concepção de Alunos do Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013a, Curitiba. **Anais eletrônicos...**Curitiba: PUCPR Disponível em:http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1717_630_ID.pdf. Acesso em: 05 dez. 2013.

SANTOS, M. C.; LINS, A. F. Concepções dos Professores de Matemática sobre Pitágoras e as Demonstrações do seu Teorema Refletido na Aprendizagem dos Alunos o Ensino Médio**.** In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8.,2013b, Montevideo. **Anais eletrônicos...** Montevideo: FISEM, 2013. Disponível em:http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/675.pdf. Acesso em: 05 dez. 2013.