



II CONEDU
CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

INFLUÊNCIAS INTUICIONISTAS NA CONSTITUIÇÃO DE UM CONCEITO MATEMÁTICO EM SALA DE AULA

Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes; Regina Coelly Mendes da Silva

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, gabriela@ccet.ufrn.br

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, reginacoelly23@gmail.com

Resumo: Esse artigo tem como objetivo apresentar reflexões acerca de aspectos intuicionistas que podem emergir no contexto da sala aula com a proposta da constituição de um conceito matemático. Pautamo-nos em alguns preceitos elaborados e apresentados na Teoria Intuicionista da Educação Matemática de John A. Fossa que compuseram a nossa malha para observação em sala de aula. Nossas reflexões apontaram que devem ser ampliados os estudos a respeito das implicações das escolas filosóficas na Educação Matemática para que se possa garantir um exercício sistêmico da atividade pedagógica baseados em pressupostos solidamente examinados.

Palavras-chave: Intuicionismo, Educação Matemática, Conceito Matemático.

Introdução

A busca pelos fundamentos da Matemática impulsionou uma grande discussão entre matemáticos no final do século XIX e início do século XX. Tradicionalmente são colocadas três vertentes nesse debate, os logicistas, os intuicionistas e os formalistas, cada uma com os seus proeminentes representantes, buscaram esclarecer quais seriam os fundamentos da matemática. As discussões acerca do assunto alimentaram vários debates posteriores e muitos matemáticos se debruçaram sobre o tema trazendo novas reflexões sobre os conceitos e princípios básicos da matemática como ciência, essas reflexões acabaram por contribuir numa reunião entre as ideias da matemática e da filosofia neste período (SILVA, 1999, pag. 47). Neste artigo, pretendemos averiguar desdobramentos mais recentes destas reflexões, que mesclam regiões de inquérito da



II CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

Filosofia, da Filosofia Matemática e da Filosofia da Educação, a Filosofia da Educação Matemática. Dentre os vários aspectos atingidos por essa área, estamos interessados em uma análise reflexiva no ensino e aprendizagem, mas particularmente no ensino e aprendizagem de um conceito matemático no ambiente da sala de aula. E esta é uma ação que cabe à Filosofia da Educação Matemática (BICUDO, 2011, pag. 48).

A vertente de pensamento a qual transitaremos tem dois importantes representantes Brouwer e Poincaré, e se trata do intuicionismo. Os aspectos que colocamos para nossa reflexão provêm da Teoria Intuicionista da Educação Matemática elaborada e apresentada por John Andrew Fossa (2011) e suas considerações como ele próprio declara, em sua maior parte, toma como base o pensamento de L. E. J. Brouwer (FOSSA, 2011, pag. 12). Em sua teoria, Fossa expõe uma lista de preceitos que incorporam pontos de vista da ontologia, da epistemologia e da ética para uma teoria intuicionista da Educação Matemática, para a nossa abordagem elencamos alguns destes preceitos para maior ponderação.

A matemática, em comparação com outras áreas de estudo do ser humano, é considerada um domínio de “grande precisão” e os conceitos devem ser colocados, também, nesta perspectiva de forma a proporcionar um alicerce sólido no qual a teoria matemática se desenvolverá. Por parte expressiva da comunidade discente, a matemática tem sido vista como uma disciplina de difícil compreensão levando título de dura, rígida, absoluta dentre outros adjetivos. A supervalorização de fórmulas e regras em contraponto de um método ativo e dialógico, levam o aluno a crer que ao memorizar as fórmulas e treinar em exercícios, que remetem a apenas a repetição dos exemplos apresentados pelo professor em sala de aula, ele estará aprendendo matemática. No entanto, de acordo com pesquisas recentes neste âmbito, esse tipo mecanicista de “aprendizado” têm gerado o tolhimento da atividade criativa do aluno. Desta forma o aluno não se vê independente da prática do professor em sala de aula e, ao encarar problemas novos, sente-se inábil a resolvê-los.



II CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

A proposta do nosso artigo se encerra em colocar as nossas reflexões sobre aspectos intuicionistas que podem emergir no contexto da sala aula acerca da construção de um conceito matemático. A mesma se dá ao concordarmos com Fossa (2011) quando atenta que boa parte do domínio das atividades humanas complexas, incluso neste, a atividade de ensino, precisa ser avaliado sob vários aspectos, tais como: determinação de metas; objetivos da atividade e a sua eficácia; a fim de oferecer um suporte para a realização de uma atividade pautada na solidez, criatividade e criticidade. De acordo com Fossa (2011) é razoável supor que a forma que se concebe a matemática afetará a maneira na qual a ensinaremos. Apesar do pouco desenvolvimento literário, em pesquisas voltadas à educação sobre a influência das escolas filosóficas no âmbito do ensino de matemática, é notória a presença de seus preceitos em livros didáticos, avaliações, currículo, prática pedagógica do professor de matemática - mesmo que este não reconheça o conhecimento intrínseco das mesmas-, dentre outros. Ainda segundo o autor, isso se justifica ao fato de que o conhecimento teórico abrange os domínios de grupos propriamente engajados na atividade de pesquisa, por prescindir experiências tão ricas, pode atingir toda uma sociedade (FOSSA, 2011, p. 14), mesmo que parte expressiva desta desconheça o seu valor instrumental. Para tanto, faremos nossas reflexões com o amparo teórico e em observações colhidas em uma aula de matemática.

Metodologia

O cenário acolhido para esta pesquisa foi a Universidade Federal do Rio Grande do Norte que é uma instituição que preza pela educação de seus alunos e foi o palco escolhido para a observação de uma aula, por ser a instituição que as autoras atualmente têm vínculo no curso de Pós-Graduação em Educação. Uma das autoras pertence ao quadro efetivo, lotada no Departamento de Matemática, e tem 10 anos de experiência no ensino superior.

A aula que possibilitou as discussões presentes neste trabalho foi preparada em acordo com alguns preceitos elaborados e apresentados por Fossa (2011) na obra “Teoria Intuicionista da Educação Matemática” e ministrada, pela autora pertencente ao



II CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

quadro efetivo da instituição acolhida, em um grupo de graduandos dos cursos de Estatística e Engenharia Elétrica. Ainda, as observações quanto à aula supracitada foram norteadas por uma ficha elaborada previamente e estruturada de acordo com as concepções de Fossa (2011), no decorrer da aula, a segunda autora do artigo realizou o registro dos dados apontados na ficha. A finalidade da observação da aula foi fomentar ainda mais alguns dos aspectos já apontados na literatura contribuindo assim, para uma reflexão mais ampla. O instrumento de coleta de dados utilizados nesta pesquisa foi pautado nos seguintes preceitos:

Em uma aula de matemática com aspectos intuicionistas, a *aprendizagem pelo aluno é o eixo central*, que deve ser considerada pelo professor a essencial matéria prima para o preparo de suas aulas. Para tanto, o professor deve ter clareza do conteúdo a ser ensinado e, além de desenvolver o raciocínio lógico do aluno, o professor deseja primordialmente que o aluno faça uso de sua intuição. O professor tem que ter consciência de que a matemática não é acabada e aquele conteúdo que ele leva para sala de aula passou por reformulações e reinterpretções em períodos e contextos diferentes e que novos conceitos, técnicas e conhecimentos foram se transformando ao longo do tempo, muitas vezes acrescentados de conteúdos. O conceito atual que será levado para sala de aula é a ponta de um *iceberg*, mas deve ser visto assim pelo professor que pretende que seus alunos alcancem uma melhor compreensão de tal conceito, na parte submersa encontra-se o desenvolvimento histórico do conceito. Isso deve ser colocado para o professor para que ele possa refletir e fazer florescer na sala de aula um ambiente que preze por não apresentar a definição de um conceito e sim construir com seus alunos esse conceito. O professor que só se importa com a Matemática atual fica limitado a ter apenas uma visão parcial prejudicando o enriquecimento das possibilidades de abordagem em sala de aula.

A matemática é uma área do conhecimento permeada por verdades e, para enxergar ou alcançar essas verdades, o aluno passa por um processo de aprendizagem que pode ou não restringir a sua criatividade. O entendimento intuicionista assume, proeminentemente, o homem além do papel de “descobridor” de um mundo de verdades matemáticas existentes por si só, idealizado por Platão, e coloca-o no patamar de “*construtor*” desse mundo. Diante disto, em um contexto intuicionista o aluno é encorajado pelo professor a fazer o uso competente de informações de conhecimentos



II CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

prévios para a construção de um novo conceito e é nesta perspectiva que a criatividade do aluno é alavancada. O exercício de busca de conhecimentos prévios é a atividade mental do aluno em busca de analogias, padrões e regras que possam ajudá-lo na construção do novo conceito. O movimento que conecta os conceitos prévios ao novo conceito é o cerne da aprendizagem, pois é onde acontecem as explosões de ideias que fazem com que os alunos descubram suas potencialidades, se sintam autoconfiantes e preparados para abstrair a níveis mais avançados. Dessa maneira, o aluno apresenta-se como “o autor” do conhecimento.

As regras impostas pela matemática, em grande parte, não são compreendidas pelo aluno e este sente dificuldades em praticar o seu jogo. Uma forma de contornar essa situação é o *professor levar o aluno a construir seus próprios conceitos matemáticos*. Para tanto, o aluno deve ser instigado pelo professor a fazer conjecturas em todo o percurso de construção de um conceito. O professor, por sua vez, compreende as conjecturas do aluno quando ele as responde ou refaz a pergunta de modo que o aluno se satisfaça. Nesse cenário o professor colhe bons frutos ao aprimora a forma de expor o conteúdo. Por sua vez, o aluno não deve apenas ouvir as palavras do professor, mas escutá-las e reagir. A reação do aluno é muitas vezes interpretada pelo professor como uma sinalização de que o aluno está devidamente ou não, compreendendo os avanços almejados pelo professor.

Outro aspecto a ser ponderado é que a *aula deve ser dialógica*, na qual o professor que pergunta e não obtém respostas, deve refazer a pergunta com outras palavras para facilitar o entendimento do aluno. O professor que entende o que os seus alunos não entenderam tem a possibilidade de enriquecer suas próximas aulas. Se a falta de resposta persistir, o porquê do professor não ter obtido uma resposta deve ser ponderado. Alguns aspectos que podem apontar a falta de resposta estão na confiança do aluno no professor, na espontaneidade de diálogo em sala, ou mesmo no medo de errar e é preciso, o quanto antes, o professor identificar e buscar formas de amenizar essa situação.



II CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

O trabalho do professor em sala de aula, neste contexto, distingue-se do tradicional por apresentar duas linhas principais: *a primeira o coloca como provocador e a segunda como organizador das ideias surgidas no ambiente de aprendizagem.* Provocador no sentido de estimular as percepções intuitivas e gerar reflexões interpessoais na sala de aula e organizador no sentido de direcionar as conjecturas levantadas pelos alunos a maiores níveis de abstração com o objetivo de aproximá-las ao conceito que se pretende alcançar. Além disso, o professor intuicionista tem como característica a promoção de um ambiente que esteja dotado de respeito mútuo - aluno-aluno e professor-aluno - para que assim os mesmos sintam-se confortáveis para conjecturar e, assim, desempenhar uma atividade criativa na construção do conhecimento.

O aluno de um curso superior tem o seu ensino predominantemente teórico e para alcançar uma postura intuicionista *o professor deve fazer uso de representações múltiplas.* No progresso da aula o aluno é levado a fazer analogias e perceber regularidades ao conceito a ser construído se este for apresentado de formas variadas. Para ascender a esse propósito, sempre que possível, o professor pode lançar mão de recursos visuais fundados em figuras que na perspectiva do aluno tem uma superior elaboração do conceito. À vista disso, o aluno precisa sustentar uma posição ativa para conquistar flexibilidade de abordagem de situações permanecendo aberto a novas experiências ele encontra novos estímulos e amadurece.

Resultados e Discussão

Como o conceito principal da aula foi o de soma de séries, a professora pesquisadora iniciou a aula procurando conhecer o que os alunos compreendiam sobre sequências e soma de números reais. Acerca da compreensão de sequências, alguns alunos apresentaram exemplos como forma de demonstrar o que eles sabiam e um aluno manifestou verbalmente uma definição formal para sequências, que considerava uma função cujo domínio é o conjunto dos naturais. Diante do exposto, a professora pesquisadora e os alunos examinaram e aceitaram os exemplos e a definição expostos.



II CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

Ao considerar a soma de números reais, só exemplos foram apresentados pelos alunos. Com o propósito de fazer com que os alunos conjecturassem que a soma é feita por etapas, que compreende somar de dois em dois números, a professora pesquisadora registrou no quadro exemplos de soma com 3 e 4 números, alguns alunos esboçaram a conjectura pretendida e os demais concordaram.

Após isso, a professora pesquisadora seguiu questionando os alunos sobre os possíveis resultados das somas de infinitos números reais. As possibilidades apresentadas pelos alunos foram: zero; infinito; impossível; um número real. Em seguida eles foram solicitados a justificar o porquê de cada uma dessas possibilidades de resultados.

De acordo com as suas colocações, sobre a possibilidade de uma soma de infinitos números reais resultar em zero, uma aluna exemplifica com a soma dos números inteiros e justifica que dará zero devido à simetria com relação à origem.

Para o possível resultado de uma soma ser infinito, um aluno exemplifica com a soma dos números naturais e justifica o resultado com a seguinte colocação: “será infinito porque vai ‘infiniteando’”. Acreditamos que o mesmo quis dizer que o resultado da soma será sempre um número maior que tenderá ao infinito. Outras colocações levantadas sobre essa questão foram: “porque as parcelas são umas maiores que as outras”; “porque estão crescendo”;

Seguindo com a ordem de justificativas, os alunos foram indagados sobre haver a possibilidade de uma soma de infinitos números reais ser impossível, os mesmos não apresentaram uma linha de justificativa pautada em argumentos sólidos, apenas atentaram que simplesmente poderia “não dar para somar”.

Sobre a soma resultar em um número real, os alunos não conseguiram levantar exemplos que justificassem tal afirmativa, e a questão ficou sem resposta por parte dos mesmos. Dessa forma, a professora pesquisadora ligou o *data show* e apresentou em *slides* alguns exemplos para justificar as respostas levantadas. Para a surpresa dos mesmos, as quatro possibilidades de resultados apontadas pela turma estavam presentes nos *slides*.

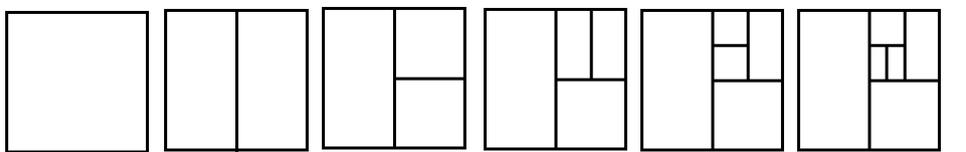


II CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

Para fomentar ainda mais a discussão, foi apresentado nos *slides* as seguintes representações:

- 1) $1+1+1+\dots$
- 2) Série que se obtém ao considerara área de um quadrado de lado 1, como na figura abaixo (figura apresentada aos alunos):



Nesta representação, os alunos foram levados a inquirir uma “passagem ao infinito”.

$$3) \begin{aligned} 1-1+1-1+\dots &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 \\ 1-1+1-1+\dots &= 1+(-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1 \end{aligned}$$

A partir disso, foi perguntado o que eles observaram nas representações anteriores e se se encaixavam em alguma das respostas dadas anteriormente. A representação 1 foi encaixada na soma de infinitos números reais que dá “infinito”. A segunda representação na percepção deles se enquadrou na resposta de uma possível soma resultar em “um número real”. A terceira representação os levou a supor que a soma de infinitos números, também pode ser “impossível”, palavra usada pelos alunos.

Para cada exemplo, fizemos o que para os alunos é praticável, algumas somas parciais:

$$1) \quad 1+1=2, 1+1+1=3, 1+1+1+1=4, 1+1+1+1+1=5$$
$$2) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

3) $1-1=0$, $1-1+1=1$, $1-1+1-1=0$, $1-1+1-1+1=1$

Foi observado que as somas feitas são de uma quantidade finita de parcelas e nenhuma inclui todos os termos da série. Também observamos que a cada soma proposta estamos acrescentamos apenas uma parcela. Passamos a chamar cada soma encontrada anteriormente de uma soma parcial, terminologia anunciada pela professora pesquisadora e amplamente acolhida pelos alunos, foi introduzida a notação convencional.

Diante desse quadro, anunciado pela discussão das três representações expostas, os alunos constatarem que existe uma diferença entre uma soma tradicional e a soma de infinitos números e que a discussão deve se centrar quando consideramos os infinitos números em uma soma. E aí o aluno se depara com uma novidade: é possível somar infinitos números reais. E eles especulam, com uma postura formalista, em busca de um algoritmo que responda as duas questões: Mas como fazer isso? Como saber que a soma de infinitos números reais é um número real? (Não foi erguido, por parte dos alunos, se quando a soma é um número real se podemos sempre determiná-la).

A fim de atender aos anseios dos alunos e na tentativa de levá-los a abstrair, os alunos são convidados, pela professorapesquisadora, a encontrar uma fórmula que represente a soma dos n primeiros termos das séries apresentadas. Alguns deles chegam a uma fórmula correta e são orientados a expor verbalmente as ideias que o levaram a tal construção.

Para alcançar o ponto central da aula, conceito de soma de séries, a professorapesquisadora pede para que os alunos pensem em uma solução para encontrar uma forma de somar os infinitos termos de uma série. Um aluno apresenta sua solução “fazer com que n vá para o infinito”, indagados em como fazer isso utilizando o que eles já sabem outro aluno diz “põe limite, limite resolve tudo”. A partir disso, foi aplicado o limite nas sequências das somas parciais, cujas fórmulas foram apontadas anteriormente por eles mesmos, constatando os resultados já discutidos.



II CONEDU
CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

Considerações Finais

Observamos que a professora pesquisadora se empenhou em promover, em sala de aula, um ambiente favorável ao diálogo. Alguns alunos se manifestaram quando foram instigados, percebemos que apenas dois alunos estavam abertos a participar mais ativamente, esse montante representou apenas 10% da turma. Ponderamos que o comportamento observado pode ter origem basicamente em dois aspectos, primeiro a turma não faz parte da prática pedagógica da professora pesquisadora e o segundo no medo de errar por parte do aluno. Mas a recepção, por parte dos alunos, pelo “tipo” da aula foi significativamente boa, pois os alunos manifestaram que a aula teve um aspecto que eles não estavam acostumados, o de os estimularem a uma participação ativa. Um aluno declarou que esse “tipo” de aula o levou a pensar, ação que ele declarou que não está relacionado às algumas aulas de matemática que ele assistiu anteriormente, pois os professores apresentavam os conceitos diretamente na forma de definições.

Os alunos quando expunham suas ideias oralmente a faziam de forma precária, no sentido de que as colocações não eram completamente fiéis aos conceitos em discussão. Na nossa reflexão, essa atitude está atrelada a uma carência no domínio da linguagem matemática e também em uma deficiência do pensamento lógico. Percebemos, também, que a maior parte dos alunos só tinham como material de consulta as anotações feitas por eles em seus cadernos, e estas eram cópia das anotações feitas pelo professor no quadro ao decorrer de uma aula. Isso configura, uma lacuna cada vez mais presente nos estudantes, a sua não aproximação à linguagem matemática escrita. Esse cenário acentua ainda mais a escassez e uma articulação satisfatória das ideias no discurso oral.

Notamos que no contexto atual, com todos os fatores que constituem a trajetória de aprendizagem de matemática, o professor faz uso recorrente das concepções associadas as três vertentes filosóficas. Apesar das três correntes citadas apresentarem concepções distintas sobre o que é a Matemática, no âmbito contemporâneo isso não parece torná-las excludentes umas das outras. No domínio deste trabalho, verificamos



II CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

que a atividade intuicionista do aluno se faz nos momentos em que os mesmos são levados a abstrair fazendo uso de seus conceitos primeiros para o direcionamento proximal de um novo conceito, e que, a partir do momento em que as abstrações são externalizadas alguns aspectos das outras correntes se fazem presentes, à exemplo a linguagem concisa e sistêmica característica do formalismo.

Com o intuito de construir o conceito desejado uma postura da professora pesquisadora foi exibir representações que ao serem interpretadas pelo aluno, o levassem a gradativamente alcançar de forma satisfatória uma aproximação ao conceito formal. Percebemos que no transcorrer da aula foi necessário, por parte da professora pesquisadora, direcionar e ajustar essas interpretações, que passaram a compor as discussões.

Dessa forma, pensamos que seja pertinente a ampliação de medidas investigativas e reflexivas no âmbito do Ensino de Matemática à luz das escolas filosóficas que a permeia, a fim de possibilitar o exercício da atividade de ensino com base em pressupostos concretamente examinados.

Bibliografia

BICUDO, M. A. V. & GARNICA, A. V. M. *Filosofia da Educação Matemática*. Coleção tendências em Educação Matemática. 4ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

FOSSA, J. F. *Teoria Intuicionista da Educação Matemática*. 2ª ed. São Paulo: Editora da Física, 2014.

SILVA, J. J. *Filosofia da Educação Matemática*. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org). *Pesquisa Em Educação Matemática: Concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

SILVEIRA, M. R. A. *Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da Matemática*. 2005. 176f. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Rio Grande do Sul, 2005.



II CONEDU
CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

ELEUTÉRIO, L. F. *Aulas de Matemática: que filosofia?* Anais do Encontro Paraibano de Educação Matemática. - Volume 1, Número 2, ISSN 2317-0042 Campina Grande: 2014