CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS PELO MÉTODO DE DEDEKIND

Lindinês Coleta da Silva; Viviane Batista dos S. Silva; Ornan Filipe de Araújo Oliveira

Universidade Federal de Alagoas / Campus Arapiraca;
lindines.silva@arapiraca.ufal.br, vivianebss2010@gmail.com, ornanfilipe@hotmail.com

RESUMO

Neste trabalho trataremos de um tópico de grande relevância para o estudo de muitos conteúdos matemáticos, principalmente quando se há uma preocupação com uma fundamentação apropriada do assunto que se trabalha. O tema que aqui será destacado é a construção dos Números Reais pelo método de Dedekind (1831 - 1916). A matemática é uma disciplina que se encontra de modo direto presente e essencial na a vida de qualquer indivíduo, ainda que este não se dê conta, e, além disso, é fato que o emprego e o uso dos números reais é algo indispensável nessas aplicabilidades da matemática no cotidiano. Deste modo, abordar o tema em questão numa perspectiva histórica e comumente não vista nos bancos escolares será de grande importância para todos aqueles que buscam conhecer um pouco sobre o surgimento e a formalização dos números reais. Assim, o que será abordado não se direcionará apenas para estudantes de matemática, mas também para todos aqueles que querem conhecer aspectos sobre os quais se fundamenta a matemática tão utilizada no dia a dia. Visando um público heterogêneo a metodologia adotada tratará de todos os elementos importantes para a plena compreensão do assunto. Iremos tratar desde os conceitos bem elementares até aqueles que necessitam de uma abstração maior. Objetivamos também contribuir com o despertar do professor de matemática em inserir nas suas aulas tópicos históricos dos assuntos em estudo, os quais enriquecerão os conhecimentos dos alunos, além de tornar a aula diferenciada mediante a realidade geralmente encontrada.
Palavras-chave: Construção, Números Reais, Educação.

INTRODUÇÃO

Suponhamos que um aluno da Educação Básica persistisse em pedir-lhe para explicar exatamente o que são os números reais, no sentido de onde surgem e sua origem. Que explicação você daria ao aluno sem ter que tratar de conceitos algébricos avançados? Apenas informá-lo de que é um conjunto constituído por números racionais e irracionais? E de onde surgem tais números? O primeiro (os racionais) é evidentemente claro e intuitivo a sua existência, mas e os irracionais, como os matemáticos formularam bases para tratar de tais números tão “estranhos”?

O objetivo deste trabalho é trazê-lo a um ponto onde você possa dar ao aluno uma resposta satisfatória para esta questão. Sua resposta pode ser breve, mas você deve se sentir confiante de que pode fornecer o máximo de detalhes. O método mais simples, porém sofisticado para construir os números reais é atribuído a Richard Dedekind, publicado em 1872. Este método é o modelo que apareceu no primeiro capítulo da primeira edição do livro clássico de Walter Rudin, "Princípios de Análise Matemática". O método foi considerado por muitos matemáticos como um pouco cruel, pois acreditavam ser de difícil absorção.

Ele consiste em utilizar-se do Conjunto dos Números Racionais (com todas as suas propriedades já estabelecidas, como relação de ordem e da forma como as operações foram definidas) e da noção de corte ou seção para construir o Conjunto dos Números Reais. Neste modelo, os números reais são definidos como sendo o conjunto de cortes de Dedekind e tudo o que se espera desse conjunto (propriedades) será feito através de tais noções. Além de Dedekind, outros matemáticos também propuseram métodos para a construção dos números reais, como Karl Weierstrass (1815 - 1897), Charles Méray (1835 - 1911) e Georg Cantor (1845 - 1918). Porém, os mais aceitos atualmente são os fornecidos por Dedekind e Cantor.

A insatisfação de Dedekind em não se ter uma base aritmética na época para a construção infinita dos números era notável, e "graças" a sua insatisfação podemos hoje ter em mãos uma forma simples, porém fina de definir os números reais. E, com isso temos mais uma ferramenta de estudo, que pode e deve ser inserida na sala de aula, contribuindo com o desenvolvimento cognitivo do aluno, uma vez que este verá a matemática estudada a partir de um ângulo diferente. É uma oportunidade de abordagem que fará toda a diferença no aprendizado, pois novos mundos são abertos quando o aluno se depara com fatos que evidenciam e revelam como acontece no campo da ciência à construção do conhecimento, mesmo que seja apenas a partir de um exemplo.

A construção em si do conjunto dos números reais não será possível de ser feita com todo o rigor matemático que deveria ser empregado, primeiramente pela ausência de certas demonstrações, e principalmente por exigir definições, resultados que não cabem ser tratados a um aluno do Ensino Médio. Mas o essencial e considerado indispensável para a compreensão será destacado, sem mencionar que o foco maior é trabalhar com um conjunto já conhecido, o dos números racionais, e introduzir um conceito simples, mas abstrato a tal ponto que será possível o aluno compreender e desenvolver habilidades cognitivas tão buscadas pelos professores de matemática, que é a de abstrair. Isto é, está sendo ofertada a oportunidade de ir além, de poder olhar e perceber que o que hoje se estuda não surge do nada. Daí surgirá o despertar de questionamentos e discussões que antes não existiam em sala de aula.

METODOLOGIA

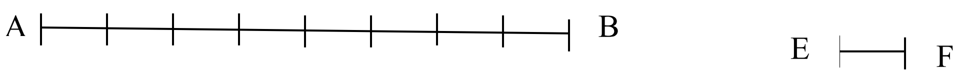
A Construção dos Números Reais se dará em tópicos, considerados cronologicamente didáticos para o desenvolvimento do assunto, podendo também tal abordagem ser feita pelo professor de matemática no Ensino Médio. Inicialmente será abordada a motivação para dada construção do conjunto, isto é, por que Dedekind sentiu a necessidade de uma formalização mais precisa sobre os Números Reais (conjunto este que não existia ainda, havia apenas a menção da existência de números que não se encaixavam no conjunto dos racionais). Deste modo, surge na nossa discussão os conceitos de comensurabilidade e, consequentemente, incomensurabilidade, uma vez que desde a Antiguidade já era sabido da existência de segmentos incomensuráveis. E, posteriormente veremos que relação há entre dado assunto com o tratado neste trabalho.

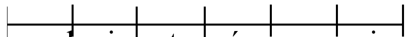
Para a construção dos números reais utilizando a noção de corte ou seção de Dedekind, o faremos levando em consideração os seguintes tópicos: analogia entre os números racionais e os pontos de uma linha reta; continuidade de uma linha reta; construção dos números irracionais; continuidade do domínio dos números reais. Essa cronologia dos tópicos apresentada é adotada em LOPES (2006), que se baseou na obra de DEDEKIND (1963). Além da bibliografia citada, nossos estudos também se fundamentaram em livros de Análise Matemática Real, os quais em sua grande maioria dedicam um capítulo exclusivamente para tratar das propriedades referentes aos Números Reais. Mas vale salientar que no que se refere a uma explanação sobre a construção do conjunto, esta geralmente é concisa e pouca abordada. Sendo papel do leitor interessado buscar bibliografias extras para complementar sua leitura.

Neste trabalho não temos a pretensão de fazer demonstrações sobre alguns resultados importantes que serão citados, devido a nossa proposta estar voltada para inserção do tema em aulas de matemática da Educação Básica. Assim, quer-se mostrar ao professor que é possível e pode-se ser ofertado aos seus alunos discussões de matemática que vão além de cálculos e contas, que em sua grande maioria estes não atribuem sentido. Deste modo, o maior foco dos nossos estudos serão as notas históricas, e a apresentação de uma sequência lógica e formal da construção feita por Richard Dedekind. Apesar disso, a quem interessar tais demonstrações, elas podem ser encontradas facilmente nas referências indicadas.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Antes de adentrarmos exatamente na construção dos números reais, precisamos entender de onde surgiu a necessidade para tal. Como a construção que aqui será feita terá uma conexão direta com a reta, adiantamos que analogias entre números e pontos serão feitas o tempo todo em nossos estudos. Segundo Ávila (2005) “historicamente, a primeira evidência da necessidade dos números irracionais ocorre com a ideia de incomensurabilidade”. Isso, porque desde a Antiguidade já era conhecido a existência de grandezas incomensuráveis, como, por exemplo, a diagonal de um quadrado com o seu lado. Considere um quadrado de lado medindo 1 unidade, logo sua diagonal, pelo teorema de Pitágoras, mede $\sqrt{2}$, número este desconhecido na época. Mas, afinal definamos o que são segmentos comensuráveis: dois segmentos AB e CD são ditos comensuráveis caso exista um segmento EF submúltiplo destes. Fazendo uma analogia da razão AB/CD com o número racional *m/n*, ou seja, dizer que a razão entre dois segmentos é o número racional *m/n*, significa que existe o segmento EF tal que *m* vezes EF é igual AB e *n* vezes EF é igual a CD. Veja a representação abaixo.





analogia entre números raciona s pontos de uma linha reta se dará a partir das duas propriedades que se seguirão. Mas, para tal Dedekind precisou *a priori* estabelecer algumas propriedades no conjunto dos números racionais, como a relação de ordem, admitiu como válidas a transitividade e a densidade, além de definir de maneira informal a noção de corte e seção. Assim, partindo do pressuposto que dois números racionais podem diferir, seguem as propriedades:

Propriedade 1: "

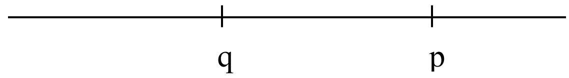
(i) *Se a > b e b > c então a > c. Sempre que a,c são dois números diferentes (ou desiguais), e b é maior do que um e menor do que o outro, iremos, sem hesitação devido à sugestão das ideias geométricas, expressar brevemente este aspecto afirmando: b está entre os dois números a, c.*

(ii) *Se a, c são dois números diferentes, existem infinitos números diferentes entre a, c.*

(iii) *Se a é um número qualquer, então todos os números do sistema Q caem em duas classes,* A_1 *e* A_2*, cada uma delas contendo infinitos elementos; a primeira classe* A_1 *compreende todos os números* a_1 *que são < a, a segunda classe* A_2 *compreende todos os números* a_2 *que são > a; o próprio número a poderá pertencer à primeira ou à segunda classe, sendo respectivamente o maior número da primeira classe ou o menor número da segunda. Em qualquer um dos casos a separação do sistema Q nas duas classes* A_1*,* A_2 *é tal que todo o número da primeira classe* A_1 *é menor do que todo o número da segunda classe* A_2*."* (DEDEKIND apud LOPES, 2006, p. 23).

Agora trabalhando com pontos da reta ao invés de números, é necessário ter uma correspondência de tudo o que foi feito nos racionais para com a reta. Para tal, ao invés da noção de maior ou menor, teremos agora esquerda ou direta. Daí, dados p, q pontos distintos da reta, p estará à direita de q, se p for "maior" que q ou q terá uma posição á esquerda de p, se q for "menor" que p.

r



Propriedade 2: *"*

(i) *Se p está situado à direita de q, e q à direita de r, então p está à direita de r; e dizemos que q está situado entre os pontos p e r.*

(ii) *Se p, r são dois pontos distintos, então existe uma infinidade de pontos situados entre p e r.*

(iii) *Se p é um ponto definido em L, então todos os pontos em L pertencem a duas classes, P_1, P_2 cada qual contendo infinitos elementos; a primeira classe P_1 contém todos os pontos p_1, que estão à esquerda de p, e a segunda classe P_2 contém todos os pontos p_2, que estão à direita de p; o próprio ponto p poderá pertencer à primeira ou à segunda classe. Em qualquer um dos casos a separação da linha recta L nas duas classes ou porções P_1, P_2 é tal que todo ponto da primeira classe P_1 está à esquerda de todo ponto da segunda classe P_2."*. (DEDEKIND apud LOPES, 2006, p. 23).

Já evidenciadas ambas as propriedades que são bases para que seja estabelecida uma analogia entre pontos de uma reta e os números racionais, percebe-se que há a necessidade de ser estabelecido um ponto, que o denominaremos de origem e o representaremos pela letra "o", e um segmento (unidade de medida) que será utilizado com o intuito de medir outros segmentos. Logo, para todo número racional *a* dado será possível obter um ponto p na reta L tal que o comprimento do segmento op é o correspondente ao número *a*, e assim diremos que o ponto p da reta corresponde ao número *a*. O ponto p estará a esquerda ou a direita de "o" se *a* é negativo ou positivo, respectivamente. Portanto, para cada número racional dado, existe um e um único ponto p na reta que corresponde a tal número, considerando que o ponto "o" corresponde ao número zero.

Feita a analogia entre reta e o conjunto dos números racionais veremos de onde surge a necessidade da construção dos números irracionais. E tal fato baseia-se na concepção que na reta existem infinitos pontos que não correspondem aos números racionais. De fato, pois se assim não o fosse, todo segmento op seria comensurável com a unidade de medida estabelecida. O que não é verdade, uma vez que já era sabido desde a Grécia Antiga que existem infinitos segmentos que são incomensuráveis com a sua unidade de medida, como é o caso do exemplo do quadrado já exposto acima.

Logo, é preciso estender o conjunto dos racionais de modo que se obtenha um conjunto "tão" contínuo como a reta. Mas, em que consiste esta continuidade da reta, em que bases formais se explica tal afirmação?

> "... nós atribuímos à recta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade, em que consiste? Tudo deve depender na resposta a esta questão, e somente através dela obteremos uma base científica para a investigação de todos os domínios contínuos." (DEDEKIND apud LOPES, 2006, p. 25).

Dedekind explica e/ou caracteriza a continuidade da reta na inversão da seguinte propriedade: Todo ponto da reta a decompõe em duas partes, onde todo ponto da primeira está à esquerda de todo ponto da segunda parte. Logo, baseia-se no princípio de que

> "Se todos os pontos da linha recta pertencerem a duas classes tal que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda classe, então existe um e um só ponto que produz esta divisão de todos os pontos em duas classes, separando a linha recta em duas porções." (DEDEKIND apud LOPES, 2006, p. 26).

Considerando que tal afirmação não poderia jamais ser demonstrada, Dedekind a considera como axioma e, assim pensa a continuidade da reta. Este também não demonstrou a unicidade do ponto mencionado no axioma, mas esta pode ser feita da seguinte forma: Considere que existem dois pontos distintos p e p' que façam a decomposição da reta em duas partes, L_1 e L_2, de tal modo que, todo ponto de L_1 esteja à esquerda de todo ponto de L_2. Sem perda de generalidade, consideremos que p está à esquerda de p', e pelo item (ii) da propriedade 2, existem infinitos pontos p'' entre p e p'. Logo, cada um dos pontos p'' situa-se à direita de p e à esquerda de p', o que implica pelo item (iii) da propriedade 2 que p'' pertence a L_1 e L_2, o que é absurdo, considerando o princípio da continuidade da reta.

Para a construção dos números irracionais, comecemos com a definição de corte ou seção, que por sinal, já nos foi apresentada, porém sob o aspecto de propriedade.

Definição (de Corte ou seção): Uma qualquer separação do conjunto dos números racionais em duas classes, A_1 e A_2, tal que todo número de A_1 é menor do que todo número em A2 consiste numa seção, que é denotada por (A_1, A_2).

Logo, já nos segue de imediato, considerando que existem infinitos pontos da reta que não correspondem aos números racionais, que

Afirmação: Nem todas as seções são produzidas por números racionais.

A demonstração desse fato encontra-se em LOPES (2006, p. 27) e consiste na seguinte ideia: Considere d um inteiro positivo e diferente de um quadrado perfeito, então existe p pertencente aos inteiros positivos, tal que $p^2 < d < (p+1)^2$.

Tome $A_2 = \{a_2 \in Q^+;\ a_2^2 > d\}$ e $A_1 = Q - A_2$, onde os símbolos Q e Q^+ representam o conjunto dos números racionais e o dos racionais positivos, respectivamente. A separação de Q em A_1 e A_2 forma uma seção (A_1, A_2), isto é, todo elemento a_1 pertencente a A_1 é menor que qualquer elemento a_2 pertencente a A_2. De fato, se $a_1 \leq 0$, por definição do conjunto A_2, temos que $a_1 < a_2$, para todo a_1 pertencente a A_1 . Agora suponhamos $a_1 > 0$, então $a_1^2 \leq d$ e $d < a_2^2$, o que resulta $a_1 < a_2$, para todo a_1 pertencente a A_1. Logo, (A_1, A_2) é uma seção.

A partir de agora, é preciso mostrar que (A_1, A_2) não é produzida por um número racional, para que seja concluído que existe um número infinito de seções que não são originadas por números racionais. Primeiro mostra-se que não existe um número racional cujo quadrado seja igual a d. E, posteriormente que não existe elemento máximo em A_1 e mínimo em A_2. Concluindo assim que a seção (A_1, A_2) não é produzida por um número racional, e, portanto existem infinitas seções ou cortes que não o são.

Logo, sempre que se há uma seção produzida por um número que não seja racional, esta o é feita por um número irracional, o qual está definido pelo corte. Mas, construir os números irracionais não é suficiente para se ter o conjunto dos números reais. Ávila (2005, p.59) coloca que "... não basta apenas juntar a Q os novos elementos para obter R. Este conjunto precisa ter a estrutura que dele se espera; daí temos que definir nele as operações usuais de adição e multiplicação, etc., e a relação de ordem".

Assim, a construção não para por aqui, mas a ideia principal, real interesse desse trabalho, já foi exposta e que condiz com que o aluno da Educação Básica precisa conhecer do assunto. Conceitos algébricos complicados para a compreensão do aluno não condiz com a finalidade da proposta do tema, logo decidiu-se parar a construção nessa etapa, pois basta mencionar a partir este momento que as operações que já conhecemos para o conjunto dos números reais, como suas propriedades são definidas e verificadas com a noção de corte e/ou seção. E só a partir de então, e através de outros estudos de matemáticos que se preocuparam com essa questão, que temos o conjunto com a sua estrutura a qual conhecemos hoje.

CONCLUSÃO

A construção dos números reais pelo método de Dedekind possui uma simplicidade que permite uma abordagem até mesmo voltada para alunos da Educação Básica, em especial para alunos do Ensino Médio. Os conceitos e ideias envolvidas na construção, como evidenciados, podem e são desenvolvidos de forma empírica, possibilitando uma compreensão mais rápida do que está sendo feito.

A aplicação do conteúdo na forma que foi exposta no tópico anterior pode ser um tema de leitura e discussão em aulas de matemática. O aluno terá a oportunidade de familiarizar-se com o texto matemático, que mesmo possuindo uma linguagem simples, já apresenta elementos importantes que o este precisa conhecer, como as noções referentes a propriedades, demonstrações e definições. Além de requerer uma abstração que faça o indivíduo entender todas as situações de forma generalizada, por exemplo, na construção dos números irracionais é necessário compreender que o número "d" usado para a obtenção da seção é tão geral, que a partir daquela construção já conseguimos garantir a existência de infinitos cortes que não são produzidos por números racionais.

Esse tema torna-se importante também na medida em que deve ser de conhecimento de todo professor de matemática, pois só assim este terá condições de oferecer para seus alunos a explicação de qualquer dúvida que venha a surgir quanto à construção do conjunto dos números reais, ou dúvidas referentes a essas questões. É importante que o professor tenha conhecimentos históricos e complementares de cada assunto que é visto em sala, podendo tornar sua aula rica e quebrar a falsa ideia de que a matemática é resumida apenas a cálculos e contas, que muitas vezes são tidas pelos alunos como inúteis. É nesse sentido que se percebe uma deficiência muita grande na forma que os conteúdos matemáticos são tratados em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo S. S. **Análise Matemática para Licenciatura.** 2. Ed, São Paulo, Edgard Blücher, 2005.

LIMA, Elon L. **Análise Real volume 1: função de uma variável.** 10. Ed, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

LOPES, Paula C. R. **Construção dos números reais.** 2006. 153 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática e Engenharias, Universidade da Madeira, Funchal, 2006. Disponível em: http://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/179/1/MestradoCristinaLopes.pdf. Acesso: 20 de fev. de 2015

NERI, Cassio; CABRAL, Marco. **Curso de Análise Real.** Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: http://www.labma.ufrj.br/~mcabral/textos/curso-analise-real-a4.pdf. Acesso: 9 de jul. de 2015.

SPIVAK, Michael. **Cálculo infinitesimal**. Reverté, 1996.