

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE DORMAND-PRINCE PARA OBTENÇÃO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA DE AMORTECIMENTO MASSA-MOLA NO MATLAB

Denn's Santana Perônica ¹
João Aurimar Correia de Moraes Neto ²
Maria Eduarda da Cruz Justino ³

RESUMO

A equação geral do movimento de um sistema de amortecimento massa-mola é expressa por uma equação diferencial de 2ª ordem, cuja solução pode ser obtida de forma analítica ou por meio de métodos numéricos. Existem diversos métodos numéricos para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), dentre eles é possível destacar o conjunto de métodos de Runge-Kutta, o qual possui um caso particular conhecido como método de Dormand-Prince, utilizado pela função ode45 do *software* MATLAB para solucionar EDOs de 1ª ordem. Como a equação diferencial do movimento é de 2ª ordem, torna-se necessário transformá-la em um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem, possibilitando a utilização da referida função para obter sua solução numérica. Diante disso, objetiva-se com este trabalho utilizar a função ode45 do MATLAB para obter as respostas em função do tempo de um sistema de amortecimento massa-mola livre e com força harmônica, com diferentes taxas de amortecimento ξ (0.00, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75 e 1.00) e comparar as respostas com as soluções analíticas. Para a análise dos resultados, foram gerados gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração dos sistemas, e obtidos seus respectivos valores máximos. Observou-se que as respostas numéricas obtidas pela função ode45 foram iguais às soluções analíticas. Verificou-se que nos sistemas livre e forçado, as velocidades e acelerações máximas decresceram à medida que a taxa de amortecimento aumentava, e que o deslocamento máximo foi superior ao deslocamento inicial apenas no sistema forçado para $\xi = 0.00$. No sistema livre, constatou-se que quanto maior a taxa de amortecimento mais rápido o sistema retorna ao seu estado de equilíbrio, e ao atingir o amortecimento crítico ($\xi = 1.00$), o sistema atinge o equilíbrio sem oscilação.

Palavras-chave: Runge-Kutta, Dormand-Prince, MATLAB, ode45, Sistema amortecido.

INTRODUÇÃO

De acordo com Hibbeler (2011) vibração é um movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos conectados e deslocados de uma posição de equilíbrio. Em geral, há dois tipos de vibração, livre e forçada. A vibração livre ocorre quando o movimento é mantido por forças restauradoras gravitacionais ou elásticas. A vibração forçada é causada por uma força intermitente ou periódica externa aplicada ao sistema.

¹ Mestrando do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, dennsantana.sb@gmail.com;

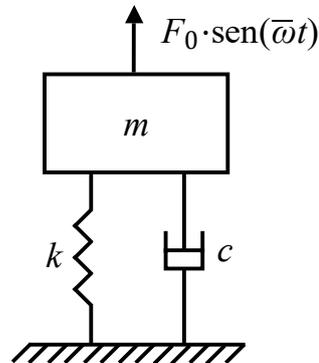
² Mestrando do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, aurimarmorais@hotmail.com;

³ Mestranda do Curso de Modelagem Matemática e Computacional da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, ueduardacruz@gmail.com.

Ambos os tipos de vibração podem ser amortecidos ou não amortecidos. Contudo, como na realidade as forças de atrito internas e externas estão presentes, o movimento de todos os corpos em vibração é amortecido. Um tipo de amortecimento de especial interesse é o amortecimento viscoso causado pelo atrito fluido a velocidades baixas e moderadas. O amortecimento viscoso é caracterizado pelo fato de que a força de atrito é diretamente proporcional e oposta à velocidade do corpo móvel (BEER *et al.*, 2012).

Um sistema massa-mola amortecido forçado por uma força harmônica $F(t)$ de apenas um grau de liberdade com um corpo de massa m preso a uma mola de constante k e ligado a um êmbolo de um amortecedor com coeficiente de amortecimento viscoso c é exibido na Figura 1.

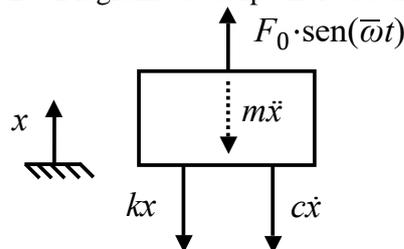
Figura 1 – Sistema massa-mola amortecido forçado.



Fonte: Elaborada pelos autores, 2022.

O princípio de D'Alembert é baseado na noção de uma força de inércia fictícia igual ao produto da massa vezes sua aceleração e atuando na direção oposta à aceleração. Tal princípio afirma que, com as forças de inércia incluídas, um sistema está em equilíbrio a cada instante de tempo. Assim, um diagrama de corpo livre de uma massa em movimento pode ser esquematizado e os princípios da estática podem ser usados para desenvolver a equação do movimento (CHOPRA, 2020). Um diagrama de corpo livre das forças do sistema é apresentado na Figura 02.

Figura 2 – Diagrama de corpo livre do sistema.



Fonte: Elaborada pelos autores, 2022.

Efetuada o somatório das forças na direção x é possível encontrar a equação geral do movimento para o sistema acima representado, como indicado na Eq. (1).

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\bar{\omega}t) \quad (1)$$

Onde:

m : elemento de massa que representa a característica inercial da estrutura (kg);

\ddot{x} : derivada segunda da posição, ou seja, a aceleração (m/s²);

c : elemento de amortecimento que representa as características de atrito e dissipação de energia da estrutura (kg/s);

\dot{x} : derivada primeira da posição, ou seja, a velocidade (m/s);

k : elemento de mola representando a força elástica de restauração e o armazenamento potencial de energia da estrutura (N/m);

x : deslocamento do sistema (m);

F_0 : amplitude de excitação (N);

$\bar{\omega}$: frequência de excitação (rad/s);

t : tempo (s).

A única diferença para o caso de um sistema massa-mola amortecido livre é a não existência da força de excitação, ou seja, $F(t) = 0$, fazendo com que o sistema seja caracterizado como livre. A Eq. (1) é uma equação diferencial de 2ª ordem, cuja solução pode ser obtida de forma analítica ou por meio de métodos numéricos. Existem diversos métodos numéricos para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), dentre eles é possível destacar o conjunto de métodos de Runge-Kutta, o qual possui um caso particular conhecido como método de Dormand-Prince, utilizado pela função ode45 do *software* MATLAB.

Logo, este trabalho tem como objetivo utilizar a função ode45 do MATLAB para obter as respostas numéricas de um sistema de amortecimento massa-mola livre e forçado, com diferentes taxas de amortecimento, verificando a confiabilidade da referida função comparando as respostas obtidas com as soluções analíticas.

REFERENCIAL TEÓRICO

Substituindo o deslocamento x na Eq. (1) pela solução $e^{\lambda t}$ e dividindo toda a expressão pela mesma, é possível então reescrever a equação diferencial característica do movimento em uma equação de segundo grau, conforme exibido na Eq. (2).

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (2)$$

Encontrando-se as raízes da Eq. (2), temos que:

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3)$$

Definindo o coeficiente de amortecimento crítico c_{cr} como o valor de c que torna o radical da Eq. (3) nulo, obtemos que:

$$\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad c_{cr} = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega \quad (4)$$

Onde $\omega (\sqrt{k/m})$ é a frequência natural do sistema. O coeficiente de amortecimento viscoso c de um sistema pode ou não ser igual ao coeficiente de amortecimento crítico c_{cr} , podendo ocorrer três casos diferentes: amortecimento supercrítico ($c > c_{cr}$), amortecimento crítico ($c = c_{cr}$) e amortecimento subcrítico ($c < c_{cr}$). A razão entre o coeficiente de amortecimento viscoso e o coeficiente de amortecimento crítico é denominado taxa ou fator de amortecimento, dado pela Eq. (5).

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \quad (5)$$

A solução analítica completa da equação geral do movimento apresentada na Eq. (1), com amortecimento e força harmônica, consiste na soma da solução complementar $x_c(t)$ e da solução particular $x_p(t)$. A solução complementar x_c , também conhecida como solução transitória, para o caso de amortecimento subcrítico ($c < c_{cr}$) é dada pela Eq. (6).

$$x_c(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (6)$$

Onde A e B são constantes a serem definidas por meio das condições iniciais e ω_D é a frequência de amortecimento dada por

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (7)$$

A solução particular x_p , também conhecida como solução do estado estacionário, é expressa por

$$x_p(t) = C_1 \sin \bar{\omega} t + C_2 \cos \bar{\omega} t \quad (8)$$

As constantes desconhecidas C_1 e C_2 são determinadas substituindo a solução particular $x_p(t)$ em $m\ddot{x}_p + c\dot{x}_p + kx_p = F_0 \sin \bar{\omega} t$.

$$C_1 = \frac{F_0}{k} \left(\frac{1 - r^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right); \quad C_2 = \frac{F_0}{k} \left(\frac{-2\zeta r}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right) \quad (9)$$

Logo, a solução analítica completa é dada por

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + C_1 \sin \bar{\omega} t + C_2 \cos \bar{\omega} t \quad (10)$$

METODOLOGIA

Os métodos de Runge-Kutta são métodos numéricos utilizados para resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Cada método de Runge-Kutta consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função f a cada passo. Estes métodos podem ser construídos para qualquer ordem p (VALLE, 2012). Em geral, métodos de Runge-Kutta são quaisquer métodos que podem ser escritos na forma:

$$x_{k+1} = x_k + h \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i \quad (11)$$

Onde

$$k_i = f \left(t_k + \alpha_i h, x_k + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j k_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

Os métodos de Runge-Kutta podem ser entendidos como um aperfeiçoamento do método de Euler, com uma melhor estimativa da derivada da função. O método de Euler é da ordem $p = 1$ e tem $m = 1$. Para $p \leq 4$, um método de Runge-Kutta de ordem p requer $m = p$. Contudo, um método de Runge-Kutta de ordem 5 requer $m = 6$, ou seja, o método torna-se menos vantajoso para $p > 4$.

Método de Dormand-Prince e o ode45

Atualmente, o método de Dormand-Prince é o método padrão na resolução de EDOs do MATLAB por meio da função ode45. O método é um membro da família dos métodos de Runge-Kutta para resolvidores de EDOs. Mais precisamente, ele avalia seis vezes a função para calcular soluções acuradas de quarta e quinta ordem. A diferença entre essas soluções é então tomada como o erro da solução (de quarta ordem). A matriz de Butcher do método é apresentado na Figura 03.

Figura 3 – Matriz de Butcher do método de Dormand-Prince.

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	-56/15	32/9				
8/9	19372/6561	-25360/2187	64448/6561	-212/729			
1	9017/3168	-355/33	46732/5247	49/176	-5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	
	5179/57600	0	7571/16695	393/640	-92097/339200	187/2100	1/40
	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	0

Fonte: MATLAB (2022).

Os coeficientes do primeiro quadrante correspondem aos β_j , os do segundo quadrante correspondem aos α_i e os do quarto quadrante aos γ_i . A primeira linha dos coeficientes γ_i fornece a solução acurada de quinta ordem e a segunda linha tem ordem quatro. Os coeficientes obtidos pela diferença entre os coeficientes de ordem quatro e de ordem cinco determinam o erro da solução. Quando esse erro ultrapassa o erro tolerável, isso significa que o passo adotado na solução está elevado. Quando isso ocorre o método de Dormand-Prince realiza um reajuste do passo de modo que o erro se torne inferior ao tolerável.

Como a equação diferencial do movimento é de 2ª ordem e o método em questão resolve apenas equações diferenciais de 1ª ordem, o que se faz é dividir a equação de 2ª ordem em duas de 1ª ordem, tornado possível a utilização do método para resolução desse sistema de equações diferenciais. Esse rearranjo é apresentado a seguir.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v = [u(2)] \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}v + \frac{F}{m} = -\omega^2x - 2\zeta\omega v + F/m = -\omega^2[u(1)] - 2\zeta\omega[u(2)] + F/m \end{cases} \quad (13)$$

A função ode45 pelo método de Dormand-Prince resolve o sistema de equações diferenciais acima, com condições iniciais ou Problemas de Valores de Iniciais (PVI) pré-estabelecidos, onde o passo empregado é o intervalo de tempo desejado. A função ode45 obedece o seguinte formato: [TOUT,YOUT] = ODE45(ODEFUN,TSPAN,Y0,OPTIONS). Onde: TOUT é o tempo de saída; YOUT é a matriz de saída cujo primeiro valor é o deslocamento e o segundo é a velocidade; ODEFUN é a matriz de entrada das funções apresentadas na Eq. (8); TSPAN é o vetor tempo com o passo indicado; Y0 é o vetor das condições iniciais; OPTIONS é utilizado para passar quaisquer outros parâmetros pela função ode45.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para ilustrar o comportamento de um sistema massa-mola amortecido com resposta livre e forçada, foram realizadas simulações para o modelo da Figura 1 utilizando a função `ode45` do MATLAB, e foram comparadas as respostas obtidas com as soluções analíticas. As simulações foram feitas utilizando seis taxas de amortecimento ζ diferentes. Os dados utilizados nas simulações estão dispostos na Tabela 01.

Tabela 1 – Dados de Entrada.

Massa - m (kg)	5.00
Rigidez da mola - k (N/m)	1000.00
Deslocamento inicial - u_0 (cm)	5.00
Velocidade inicial - v_0 (cm/s)	0.00
Amplitude de excitação - F_0 (kg.cm/s ²)	5000.00
Frequência forçada - $\bar{\omega}$ (rad/s)	4ω
$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$	0.00, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00

Fonte: Elaborada pelos autores, 2022.

De posse dos dados de entrada, foi possível calcular a frequência natural do sistema ω e a frequência da força de excitação $\bar{\omega}$, uma vez que foi dada a razão de frequências:

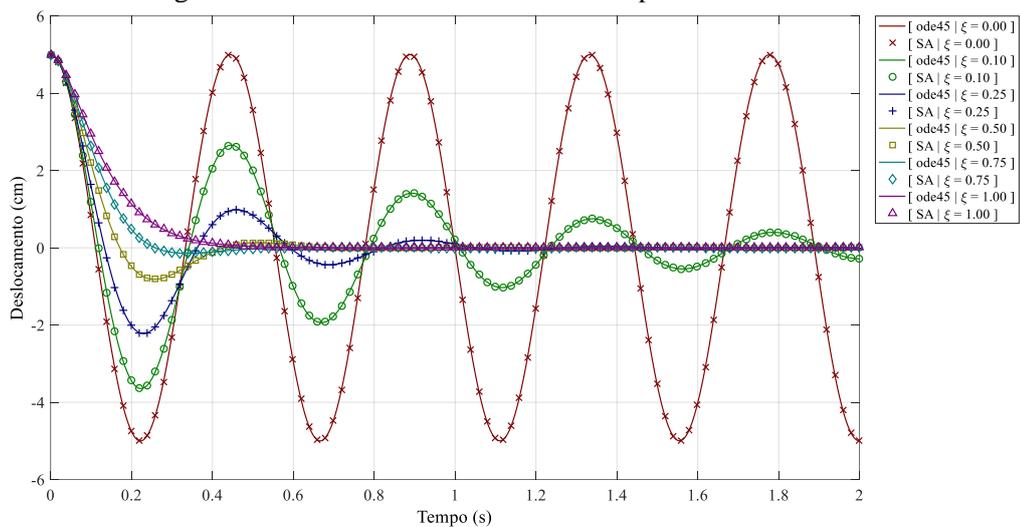
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000 \text{ (N/m)}}{5 \text{ (kg)}}} = 14.14 \text{ rad/s}$$

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 4 \quad \rightarrow \quad \bar{\omega} = 4 \cdot 14.14 = 56.56 \text{ rad/s}$$

Foi adotado um intervalo de tempo t de 2s variando em passos de 0.001s. A função `ode45` utiliza os dados de entrada e realiza um *loop* com a função complementar que contém as duas equações diferenciais de 1ª ordem, esse *loop* é realizado para cada valor de t aplicando o método numérico de Dormand-Prince. Contudo, a função determina apenas os valores de deslocamento e velocidade do sistema. Para determinar a aceleração utilizou-se a função *gradient* do MATLAB nos dados da velocidade.

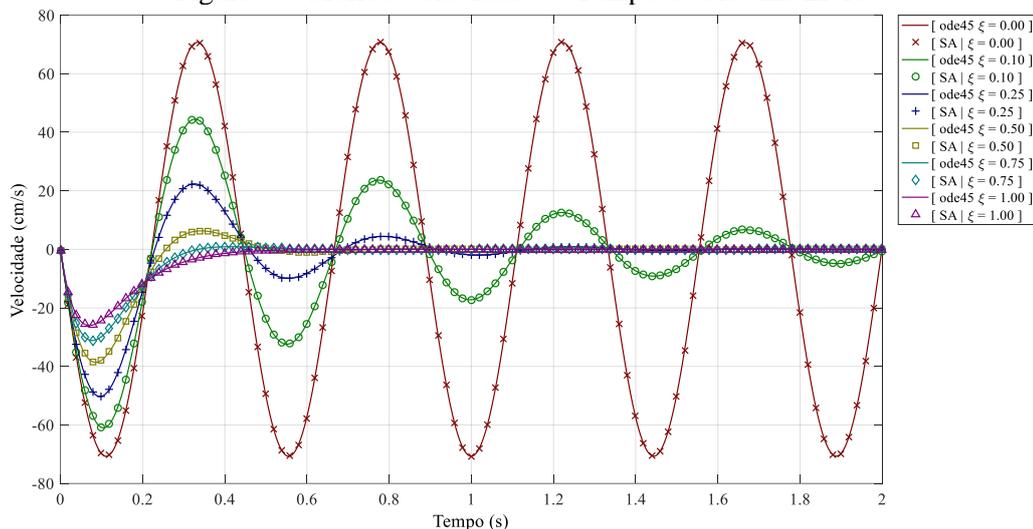
A solução analítica foi encontrada por meio da Eq. (10), porém, tal solução fornece apenas os resultados do deslocamento em função do tempo t . Desse modo, também foi utilizado a função *gradient* para determinar as soluções analíticas de velocidade e aceleração do sistema. Foram gerados os gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo do sistema livre e forçado com diferentes taxas de amortecimento, sendo os mesmos apresentados a seguir.

Figura 4 – Gráfico Deslocamento vs Tempo do Sistema Livre.



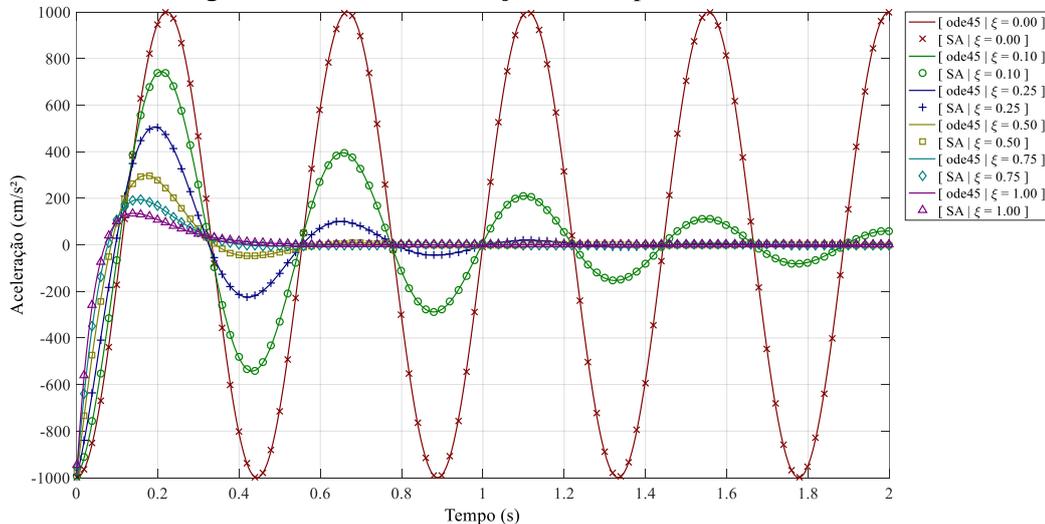
Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

Figura 5 – Gráfico Velocidade vs Tempo do Sistema Livre.



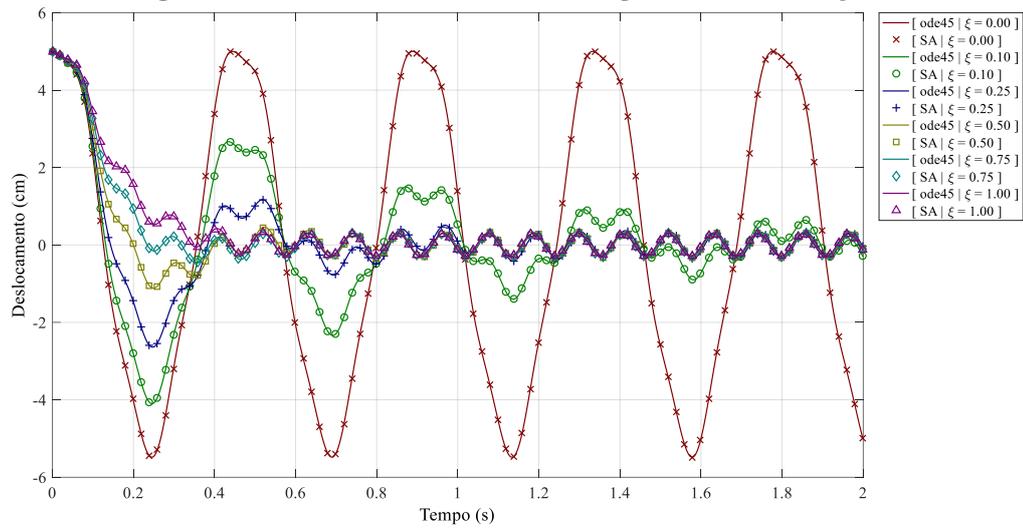
Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

Figura 6 – Gráfico Aceleração vs Tempo do Sistema Livre.



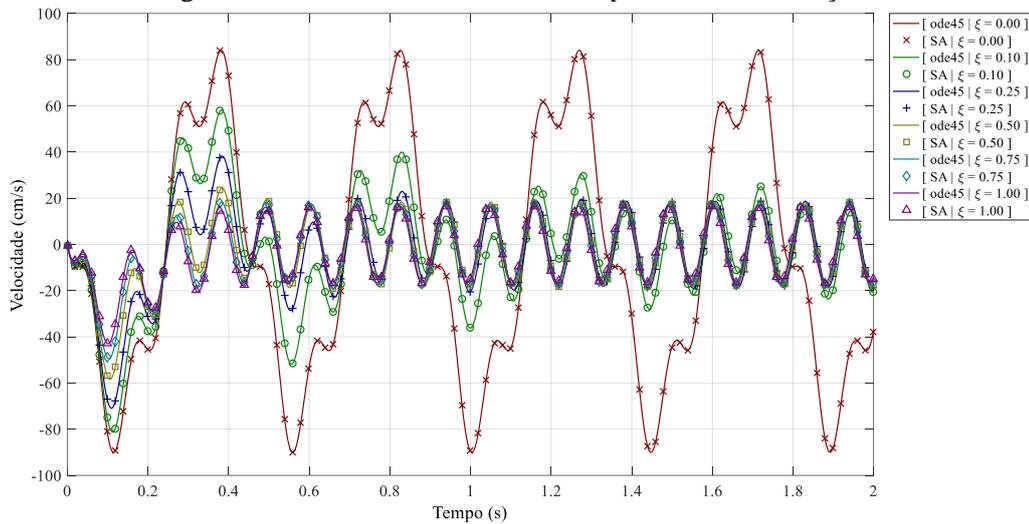
Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

Figura 7 – Gráfico Deslocamento vs Tempo do Sistema Forçado.



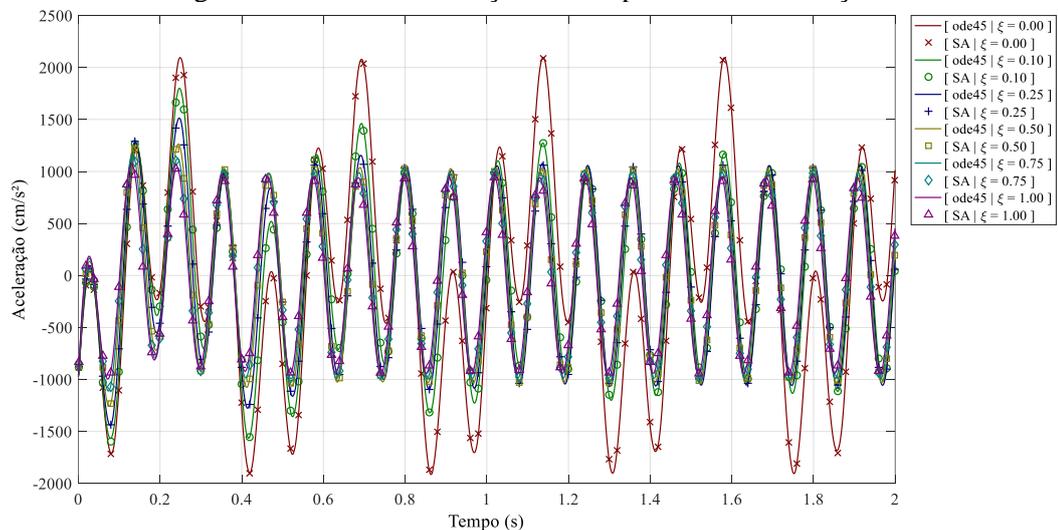
Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

Figura 8 – Gráfico Velocidade vs Tempo do Sistema Forçado.



Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

Figura 9 – Gráfico Aceleração vs Tempo do Sistema Forçado.



Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

É possível notar que as respostas numéricas obtidas pela função ode45 apresentaram ótima concordância em relação às soluções analíticas para todas as taxas de amortecimento e em ambos os sistemas. No sistema livre, quando $\zeta = 0.00$ o mesmo não entrou em repouso, o que é coerente, uma vez que quando $\zeta = 0.00$ não há amortecimento. À medida que a taxa de amortecimento aumentava, o sistema atingia o equilíbrio mais rapidamente, tendo alcançado o repouso sem oscilação quando atingido o amortecimento crítico ($\zeta = 1.00$).

No sistema forçado, o mesmo não chegou a atingir o equilíbrio, e isso ocorreu devido a força de excitação harmônica atuando no sistema. Quando havia amortecimento ($\zeta \neq 0.00$), o deslocamento tendia ao movimento causado pela força harmônica correspondente à solução do estado estacionário da Eq. (8). Foram obtidos os valores máximos de deslocamento, velocidade e aceleração dos sistemas livre e forçado para cada valor de taxa de amortecimento. Tais valores são apresentados nas Tabela 2 e 3.

Tabela 2 – Respostas Máximas do Sistema Livre.

ζ	Deslocamento (cm)	Velocidade (cm/s)	Aceleração (cm/s ²)
0.00	5.00	70.71	996.67
0.10	5.00	60.88	982.71
0.25	5.00	50.24	962.25
0.50	5.00	38.54	929.40
0.75	5.00	31.14	898.05
1.00	5.00	26.01	868.13

Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

Tabela 3 – Respostas Máximas do Sistema Forçado.

ζ	Deslocamento (cm)	Velocidade (cm/s)	Aceleração (cm/s ²)
0.00	5.48	89.98	2037.24
0.10	5.00	81.09	1735.02
0.25	5.00	70.91	1440.77
0.50	5.00	57.78	1175.78
0.75	5.00	49.25	1096.33
1.00	5.00	42.95	1022.06

Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

É possível observar que os deslocamentos máximos de todos do sistema livre equivalem ao deslocamento inicial. Isso ocorre devido ao fato de não haver uma força externa sendo aplicada que faça o sistema se deslocar além de sua posição inicial. Já no caso do sistema forçado é possível observar que a ação de tal força só foi capaz de provocar um deslocamento maior que o inicial apenas no caso de $\zeta = 0.00$.

Pode-se notar também que as velocidades e acelerações máximas decresceram à medida que as taxas de amortecimentos aumentaram, sendo então inversamente proporcional à essa propriedade. Tal fenômeno é explicado em razão de que quanto maior é a taxa de amortecimento, maior é a tendência de repouso do sistema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As respostas numéricas de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo do sistema massa-mola amortecido livre e forçado obtidas pela função ode45 do MATLAB, que emprega o método de Dormand-Prince, alcançaram ótima concordância em relação às soluções analíticas para todas as taxas de amortecimento, ou seja, reproduziu soluções confiáveis e satisfatórias.

Embora o ode45 seja uma função que empregue um método numérico, ou seja, que não apresenta resultados exatos, a sua solução é altamente confiável devido ao erro mínimo que ela produz. Isso ocorre em virtude de que, quando o erro da solução ultrapassa o erro tolerável, o passo adotado na solução está elevado, então é realizado um reajuste do passo de modo que o erro se torne inferior ao tolerável.

A partir das soluções, foi possível realizar algumas constatações. Para o sistema livre, quando $\zeta = 0.00$ o sistema não retorna ao seu estado de equilíbrio, ou seja, permanece oscilando ininterruptamente. Quanto maior a taxa de amortecimento, mais rapidamente o sistema retorna ao seu estado de equilíbrio e ao atingir o amortecimento crítico ($\zeta = 1.00$), o sistema atinge o equilíbrio sem oscilação.

Contudo, ao analisarmos o sistema forçado, percebeu-se que independentemente do valor de ζ , o sistema nunca entra em repouso. Isso se deve ao fato de haver uma força de excitação atuando no sistema. Tal força provoca perturbações periódicas no sistema, o que provoca deslocamentos e o impede de ficar imóvel.

REFERÊNCIAS

BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R.; CORNWELL, P. J. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: Dinâmica**. 9^a ed., 779p., Porto Alegre, 2012.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 5^a ed., 994p., London, 2020.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: Mecânica para Engenharia**. 12^a ed., 710p., São Paulo, 2011.

MATLAB M. **The language of technical computing**. The MathWorks, Inc, 2022.

VALLE, K. N. F. **Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta**. 2012. 40 f. Monografia (Especialização) - Programa de Pós-graduação em Matemática Para Professores Com Ênfase em Cálculo, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.