



OBSTÁCULOS DIDÁTICO-EPISTEMOLÓGICOS NO ENSINO DA REGRA DE SINAIS NOS NÚMEROS INTEIROS.

Willamy Francelino de Oliveira ¹
Verônica Gitirana Gomes Ferreira ²

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo identificar e analisar as estratégias matemáticas utilizadas pelos alunos do 3º ano do Ensino Médio e 9º ano do Ensino Fundamental ao se deparar com diferentes situações de multiplicação com números negativos e quais ligações tais situações puderam gerar em relação aos obstáculos epistemológicos e didáticos ao longo das soluções. As dificuldades são comparadas, em uma abordagem histórica, mostrando que são dificuldades que permanecem até os dias atuais, denominadas de obstáculos epistemológicos. São discutidos, nesta pesquisa, trabalhos feitos que abordassem tais dificuldades de ensino/aprendizagem dos números negativos. Quanto à metodologia da pesquisa, foi construído e aplicado um questionário/teste contendo cinco questões envolvendo multiplicação e/ou divisão de números negativos com alunos de uma escola estadual localizada no Recife. A elaboração do teste foi baseada em livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, ano esse onde é feita a abordagem dos números negativos. Foram comparadas algumas estratégias utilizadas associadas à resolução de duas questões. Os resultados mostram que os estudantes conseguem resolver as situações quando em questões de operações únicas e simples. Porém, em expressões ou quando precisam justificar, fica claro que o uso é apenas de uma regra decorada.

Palavras-chave: Números Negativos, Operações com inteiros, Obstáculos, Regra de Sinais, Ensino-Aprendizagem.

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa iniciou no projeto da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a Residência Pedagógica, quando pude atuar como professor residente de 2018 até o início do ano de 2020, onde pude ter maior participação em sala de aula e avaliação/coordenação de alguns projetos na escola. Observei que a maioria dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Recife tinha dificuldades no

¹ Graduado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. Pós Graduado em Tópicos Especiais em Matemática pela Faculdade Dom Alberto, willamyufpe@gmail.com.

² Professor(a) orientador(a): Pós-doutora pelo Instituto Francês de Educação IFE do ENS-Lyon. Professora Associado IV da Universidade Federal de Pernambuco- UFPE, veronica.gitirana@gmail.com.



uso correto das regras dos sinais da multiplicação e divisão. Dificuldades essas que, a uma primeira impressão, deveriam estar sanadas considerando o ano escolar em que estavam.

No entanto, estudos da história da matemática (BOYER, 1974) mostram o quão divergente foi o processo de aceitação dos números negativos e os estudos sobre obstáculos epistemológicos e didáticos (BACHELARD, 1947; BROUSSEAU, 1989) discutem o quão um conhecimento válido por muitos anos, torna-se um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. Os números negativos são um dos casos típicos de conhecimento que sofre barreiras advindas do conhecimento dos naturais.

Então não é tão razoável estabelecer parâmetros e discussões do ponto de vista do erro do aluno ao estudar os números inteiros, em particular os negativos. Existe todo um estudo por traz que irão mostrar onde cada dificuldade aparece e qual obstáculo seja epistemológico ou didático pode se apresentar ao se depararem com diferentes situações de multiplicação com números negativos.

Nesse sentido, viso aprofundar a relação entre esses obstáculos e os contextos em que se usam tais números. Analisando e identificando as estratégias utilizadas com os alunos (do 3º ano do Ensino Médio e 9º ano do Ensino Fundamental) na distinção e solução de questões que requerem a multiplicação ou divisão de números negativos.

O ensino dos números inteiros se faz necessário não só no campo da matemática em si onde se tem grande uso/importância ao longo do ensino básica e superior, pois é utilizado em outras áreas (física, química e biologia) do ensino básico e na vida cotidiano, seja ela no campo mais simples ao resolver uma conta de supermercado, farmácia ou para estudos fazer estudos de temperatura, distância, contagem de tempo ao longo da história da humanidade, bolsa de valores, construção civil, modelagem e etc.

Esse tudo foi feito por meio de aplicação de um teste/ questionário contendo cinco questões abertas e foi aplicado com turmas do 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio, com duração de uma hora aula. Foram analisadas as respostas que mais se encaixavam com as relações dos obstáculos epistemológicos e didáticos.



METODOLOGIA

Esse estudo foi realizado por meio da aplicação de um teste para dois grupos de estudantes, cada um dos dois níveis de ensino foco do estudo: foram escolhidos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio. A escolha desses alunos foi baseada na sua participação e frequências nas aulas de matemática, sendo então alunos que faltavam à maioria das aulas (para melhor comparar com os que acompanham regularmente as aulas) e alunos que sempre participam das aulas.

O teste foi aplicado e teve duração de uma hora-aula, com as questões impressas entregues aos estudantes e lidas no grupo classe. Explicações só foram dadas sem que interferissem diretamente na resolução da questão.

O 9º ano do ensino fundamental foi escolhido por ser um ano escolar próximo à abordagem dos números inteiros negativos, estaria diante do conhecimento recém-estudado. Já o 3º ano, final do ensino médio, foi escolhido por já ter um conhecimento que deveria estar consolidado. Além da operação em si, os estudantes utilizam multiplicação entre negativos em problemas de diversos outros campos da matemática escolar e em outras disciplinas.

O teste teve cinco questões distribuídas em 10 itens, questões com a utilização dos números negativos envolvendo a resolução de multiplicação e divisão simples e expressões aritméticas. Em uma das questões é pedido que o aluno justificasse a resposta dada.

TESTE

(1º) Resolva as operações:

a) $12 \div (-3) =$ b) $(-10) \div (-2) =$ c) $2 \times (-2) =$ d) $(-5) \times (-2) =$

(2º) Resolva as expressões aritméticas e/ou equações:

a) $(-2) \times (-2) \times (-2) =$ b) $(-8) \times (4 - 5) + 3(8 - 10) =$

c) *Qual valor de A que satisfaz a igualdade?* $-(-3) \times A = 12$

(3º) Resolva a expressão usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$(-3) \times [(+2) - (-2)] =$



(4º) Resolva a expressão usando a prioridade das operações (que estão entre colchetes)

$$(-3) \times [(+2) - (-2)] =$$

(5º) Quanto vale $(-3) \times (-2)$? Por quê?

REFERENCIAL TEÓRICO

- Números Negativos

O desenvolvimento dos números negativos ao longo da história se deu de forma cautelosa e com algumas divergências no percurso. Boyer (1947) em seu trabalho destaca que os chineses não tinham dificuldades e já utilizavam os números negativos para cálculos, eles trabalhavam com “barras” vermelhas para os números de coeficiente positivo e preto para os negativos. Porém, não era usada essa mesma ideia para solucionar equações. Posteriormente, foi feito o uso de soluções negativas para equações do 2º grau com o matemático indiano Brahmagupta que sistematizou o número negativo e o zero pela primeira vez.

Diofanto no século III operou facilmente com os números negativos. Utilizava constantemente em cálculos intermediários em muitos problemas, contudo havia certos problemas para o qual as soluções eram valores inteiros negativos como, por exemplo: $4 = 4x + 24$, onde o valor de x teria que ser igual a -5 para essa igualdade se tornar verdadeira. Nestas situações Diofanto limitava-se a classificar o problema de absurdo.

Porém, ele continuou a não aceitar que um número negativo pudesse ser solução para uma equação do segundo grau, apesar de entender bem as propriedades dos números negativos, ele os chamou de “numeri absurdi”. Os números negativos a partir do (Séc.XVIII) começou a ser utilizado e aceito pelos europeus quando foi descoberta uma interpretação geométrica dos números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas.

- A noção de Obstáculo Epistemológico

A noção de obstáculo epistemológico foi desenvolvida por Bachelard (1947), epistemólogo e poeta, para estudar as grandes revoluções do conhecimento científico, localizada por ele em um momento de ruptura de paradigmas. Assim, Bachelard estudou os momentos de estagnação e rupturas que provocaram grandes evoluções nas ciências, e verificou que conhecimentos ou paradigmas bem estabelecidos e válidos eram obstáculos para a evolução da ciência. Brosseau (1989), por sua vez, inspirado na noção de obstáculo



epistemológico trouxe para o contexto da sala de aula a noção, introduzindo a noção de obstáculo didático.

Os obstáculos epistemológicos podem ser definido/entendidos como os entraves, que fazem parte do próprio conhecimento científico do indivíduo podendo estagnar seu desenvolvimento científico e social. Bachelard (1996) afirma que um obstáculo epistemológico permanece forte no conhecimento que não é questionado e hábitos que foram úteis e sadios para solucionar problemas podem, com o tempo, enterrar a pesquisa e a busca por novos conhecimentos.

Considerando que o aluno não é um ser sem conhecimentos prévios, é necessário que o professor proponha alternativas a fim de transcender os obstáculos epistemológicos existentes em seu conhecimento prévio e promover a aprendizagem por meio de um processo que mude seus hábitos ao se deparar com certos problemas.

Então se o professor desconsidera os conhecimentos prévios que o aluno tem sobre a construção e operações feitas anteriormente em sala de aula com os números naturais, ele continuará por reafirmar os erros já existentes e a aprendizagem dos números negativos será diretamente afetada.

- Obstáculo Didático

Guy Brousseau, professor universitário e especialista no ensino da didática das ciências, é considerado o “pai” da didática na matemática, introduziu a noção de obstáculos didáticos nas ciências, em especial, na matemática.

Obstáculos de origem didática tendem a serem aqueles que partem das escolhas e propósitos que o sistema educacional busca. Ele destaca que o ensino dos números decimais é feito por todo mundo devido a sua grande utilidade na prática/cotidiano e seu ensino é baseado nos sistemas de medidas.

O erro para Brousseau (1989) é considerado um ponto importante para o ensino-aprendizagem do aluno. O aluno que não tem dúvidas possivelmente não terá a oportunidade para desencadear novos conhecimentos e irá se deparar com situações em que seu conhecimento não dará conta de solucionar gerando um obstáculo.

Brousseau (1989) discute que o obstáculo pode surgir devido aos métodos práticos e cômodos utilizados pelos alunos para solucionar problemas de um mesmo domínio. O obstáculo vem a incomodar quando não se consegue resolver problemas mais sofisticados



(apesar de ser do mesmo domínio de conteúdo), usando as mesmas ferramentas que anteriormente lhe trouxeram êxito.

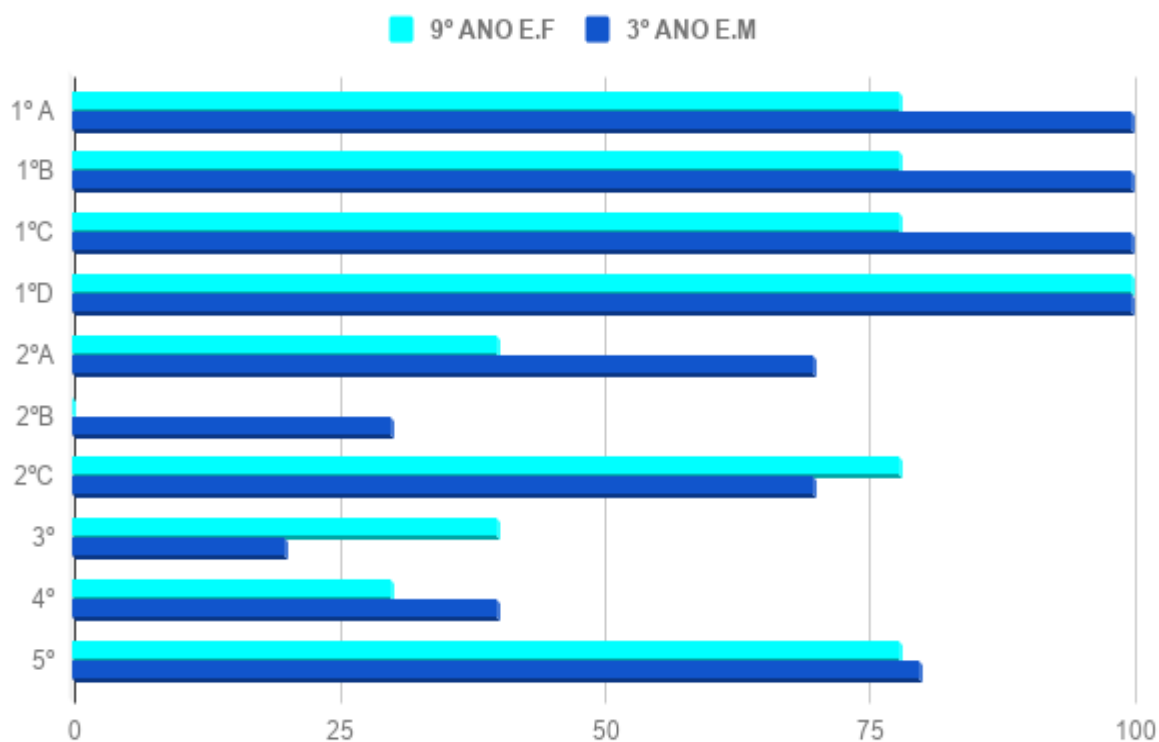
Um exemplo que ele traz é na solução de um sistema linear utilizando o método por substituição, que é útil quando existem apenas duas equações, mas inviável para solucionar um sistema com número suficientemente grande de equações e variáveis.

Os obstáculos surgem a partir dos erros, seja erro de uma simples solução (uso incorreto algebricamente) ou erro de fundamentação (conceitos aprendidos de forma incompleta ou que precisaram ser sofisticados). Brosseau (1989) defende que o erro didático tem de ser visto/analísado como uma ferramenta para aprofundar o sistema professor-ensino-aprendizagem-aluno e desenvolver mais situações/problemas/ exercícios que possam gerar no aluno a capacidade de diferenciar e revisar situações/conceitos outrora já aprendidos dos que irão surgir com novas ferramentas a serem utilizadas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em termos de acertos e erros, o gráfico a seguir sintetiza os resultados obtidos.

Figura 1: gráfico do percentual de acertos de cada questão.



Fonte: elaborado pelo autor.



Desse gráfico, destaco as 3ª, 4ª e 5ª questões do teste. Nas questões três e quatro, o resultado final deveria ser o mesmo caso o aluno tivesse feito corretamente às duas questões. O que mais chamou atenção foi o fato da maioria dos alunos não perceberem que o resultado final de cada questão seria o mesmo e, por muitas vezes, respondiam certo em uma e um resultado errado em outra. Em alguns outros casos respondiam iguais nas duas questões com o resultado errado. Houve também um dos alunos que respondeu uma das questões corretamente, mas na outra respondeu “não sei”.

Figura 2: resolução dos alunos A e B.

3) Resolva a expressão usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$$\begin{aligned}(-3) \times [(+2) - (-2)] &= \\ -6 - 2 &= -4\end{aligned}$$

4) Resolva a expressão usando a prioridade das operações (que estão entre colchetes)

$$\begin{aligned}(-3) \times [(+2) - (-2)] &= \\ (-3) \times 0 &= 0\end{aligned}$$

3) Resolva a expressão usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$$\begin{aligned}(-3) \times [(+2) - (-2)] &= \\ -6 - (-2) &= -8\end{aligned}$$

4) Resolva a expressão usando a prioridade das operações (que estão entre colchetes)

$$\begin{aligned}(-3) \times [(+2) - (-2)] &= \\ (-3) \times 4 &= -12\end{aligned}$$

Fonte: arquivos do autor.

Nota-se que nestas soluções existem erros didáticos, como na distributiva multiplica o valor pelo 1º termo e repete o 2º, a $(b+c) = ab+c$. Podemos perceber que o aluno efetua a multiplicação do primeiro termo e acerta no uso dos sinais $(-3) \times (+2) = -6$, mas ignora o fato de multiplicar o 2º termo possivelmente por ter o hábito apenas de fazer multiplicações simples (com um único termo). Outro erro [é considerar $(+2) - (-2) = 0$] destacado está na compreensão por parte do uso dos sinais em operações com parênteses fica claro que nesses casos o uso da regra dos sinais torna-se um obstáculo na resolução da questão, comprometendo o resultado final dos itens acima.



Na 5ª questão, na qual foi perguntado “Quanto vale $(-3) \times (-2)$? Por quê?”

Destaco grande índice de acertos que teve e que a estratégia da maioria foi: multiplicar primeiro os números esquecendo os sinais trazidos com eles e, por fim, utilizaram a regra dos sinais para justificar os sinais. Vale ressaltar também que a maioria deles não conseguia justificar o porquê dava positivo e muitos deles falavam e/ou alguns escreveram “não aprendi a explicar isso” ou “como devo justificar” ou “a professora nunca disse o porquê menos com menos dava mais” ou “explicar isso é muito difícil”.

Figura 3: respostas do aluno C.

5) Quanto vale $(-3) \times (-2)$? Por que?
6, Porque os sinais numa multiplicação são sempre positivos.
OBS.: NÃO APRENDEMOS A JUSTIFICAR ESSAS COISAS NAS AVULAS.
APENAS APRENDEMOS AS REGRAS.

Fonte: arquivos do autor.

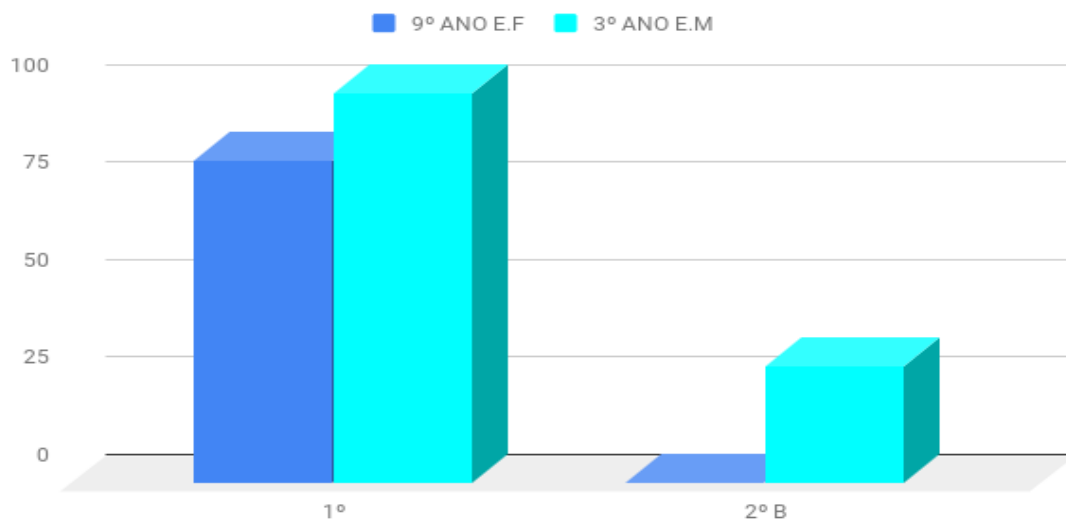
O resultado final como sendo +6 foi obtido por todos os alunos que fizeram o teste, porém percebe-se na figura 1 que não temos 100% de acertos por que justificou errado.

Fica bem claro nesse item o que o “modelo comercial” que Hillesheim (2013) traz em relação aos números negativos quanto à dificuldade em explicar aos alunos o porquê da multiplicação de dois números negativos serem um número positivo. Esse fato se caracteriza por um obstáculo didático, pois quando o professor vai ensinar aos alunos a regra dos sinais com exemplos concretos da vida real (crédito, débito, temperatura, altura e subida ou descida) recairá no erro quanto transpor essa mesma ideia para explicar os números negativos e com isso o aluno acabará utilizando o conceito aprendido e errando a questão.

Essas respostas nos levam a refletir o quão difícil é tanto para professores explicarem de forma concreta/convincente ou para alunos entenderem a regra dos sinais da multiplicação. Por fim, destaco a primeira questão do teste e o item B da segunda questão.



Figura 4: percentual de acertos médio da 1ª questão e de acertos do (item b) da 2ª questão.



Fonte: elaborado pelo autor.

Após a análise das respostas dos alunos do 3º ano do ensino médio e 9º ano do ensino fundamental e dos gráficos de acerto das 1ª e 2ª questões, podemos observar que existe uma compreensão dos alunos quando se trata de uma operação “simples” com os números negativos como: $15 \div (-3)$. Nota-se por meio do gráfico que houve 100% de acerto desses itens por alunos do 3º ano do ensino médio e, mais de 75% de acerto, pelos alunos do 9º ano do ensino fundamental.

Quando se trata (do item b) da 2ª questão pudemos observar que houve um baixíssimo índice de acerto por parte dos alunos do 3º ano do ensino médio e não tivemos acerto algum por parte dos alunos do 9º ano. Neste item, pode ser questionado se os índices de erro foram elevados devido à “composição” dessas operações onde foi pedido para resolver: $(-8) \times (4 - 5) + 3(8 - 10) =$, diferentemente de como era abordado na 1ª questão onde resolvem uma divisão ou multiplicação apenas.

Figura 5: resposta do aluno D

$$\begin{aligned} & (-8) \times (4 - 5) + 3(8 - 10) = \\ & (-8) \times (-1) + 3(-2) = \\ & 8 + 3(-2) \\ & 8 - 6 = 2 \end{aligned}$$

Fonte: arquivos do autor.



O gráfico da figura 4 mostra claramente que as estratégias de erro se concentram, essencialmente, em situações mais complexas que envolvem a regra dos sinais ao longo da solução.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto neste trabalho, pode-se observar e analisar as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem dos números negativos, tendo em vista seu longo processo de aceitação durante o desenvolvimento da matemática e os obstáculos epistemológicos e didáticos observados e trabalhados em sala de aula. Os resultados mostram que os estudantes conseguem resolver as situações quando em questões de operações únicas e simples, mas que existem obstáculos didáticos e epistemológicos quando se trata de expressões maiores.

É de suma importância para o professor um tratamento diferenciado com esse tema, exemplificando de várias formas e dando recursos/significações distintas do seu uso tanto na regra aditiva (no qual pode ser feito uso de modelos prático-comerciais do cotidiano) quanto na multiplicativa (no qual não podemos utilizar elementos de natureza extra matemática para explicar).

Por fim, o professor tem de trabalhar alguns conceitos matemáticos e fazer com que seja compreendido por parte dos alunos que a matemática tem seus aspectos e tratamentos exclusivos dentro do seu campo abstrato respeitando suas propriedades e que nem sempre podemos justificá-los com elementos da vida real.

REFERÊNCIAS

ALVES, Evanilson Landim. Multiplicação e Divisão de Números Inteiros: ensino-aprendizagem na EJA. **Anais do XIII CIAEM - Congresso Interamericano de Educação Matemática**. Recife, 11 p., 2011.

ROSA, Carlos Eurico Galvão. **Produto de Números Negativos: Estratégias para tratar um obstáculo epistemológico**. 2013.

HILLESHEIM, Selma Felisbino; MORETTI, Mércles Thadeu. O modelo comercial: um entrave persistente à aprendizagem da regra de sinais. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 4, n. 2, p. 37-56, 2013.

GLAESER, Georges. Epistémologie des nombres relatifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 2, n.3, p. 303-346, 1981.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.



BACHELARD, Gaston. **La formation de l'esprit scientifique**. Paris: J. Vrin, 1947.
Tradução por Estela dos Santos Abreu. A formação do espírito científico. Rio de Janeiro:
Contraponto, 1996.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N.
BEDNARZ; C. GARNIER (Eds.), **Construction des savoirs , Obstacles et Conflits** (pp. 41-
63). Montréal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc, 1989.