

INTRODUÇÃO ÀS BASES DE GRÖBNER

Andreza Katyusya Gomes de Moraes¹
Claudemir Fidelis Bezerra Júnior²

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a Unidade Acadêmica de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande tem realizado trabalhos de iniciação científica de modo muito intenso. Para a nossa unidade, a iniciação científica é um dos principais recursos com a finalidade de preparação de candidatos ao mestrado em matemática.

No contexto atual da ciência, saber utilizar o computador em resolver problemas em matemática torna-se cada vez mais essencial. O “ataque” de certa metodologia em temas clássicos em Álgebra Comutativa, Geometria Algébrica e, por que não dizer, em PI-álgebras é uma tema moderna, simplificando a abordagem e propiciando cálculos efetivos. Neste contexto estudaremos as bases de Gröbner, um tipo particular de subconjunto gerador de um ideal em um anel de polinômios, utilizando software específico da área. Esta teoria foi desenvolvida por B. Buchberger em 1965, e foi assim denominada em homenagem ao seu orientador W. Gröbner. Um conceito análogo para anéis locais foi desenvolvido independentemente por H. Hironaka em 1964, recebendo o nome de base padrão. A teoria análoga para álgebras de Lie livres foi desenvolvida por A. I. Shirshov em 1962.

Um problema que “parece” ser de fácil resolução é sobre a pertinência para ideal de polinômios. Mais precisamente, é decidir se um dado polinômio pertence ou não a um ideal do anel de polinômios. Podemos citar como ferramenta a utilização das bases de Gröbner e utilizaremos como base de nossos estudos o livro [3].

Este projeto se iniciou no período de 2019.1 da UFCG e foca em desenvolver ferramentas e rigor matemático para aplicá-lo em software especializado em matemática. O objetivo geral é a preparação do aluno a desenvolver e expor a pesquisa científica em matemática, bem como estimular a redação matemática formal e “alimentar” estudos futuros na área, onde um desses estudos é implementar os algoritmos aqui estudados em software

¹ Graduanda de Bacharelado em Matemática. Discente da Unidade Acadêmica de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da UFCG – Campus de Campina Grande /PB. E-mail: andreza.katyusya@gmail.com

² Doutor em – Unicamp – Campinas/SP. Docente da Unidade Acadêmica de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da UFCG – Campus de Campina Grande /PB. E-mail: claudemir@mat.ufcg.edu.br

computacional. Neste trabalho iremos abordar a motivação para o surgimento dessas bases assim como alguns conceitos e teoremas ligados a anéis de polinômios em várias indeterminadas e de ideias monomiais, dentre os quais destacamos o algoritmo estendido da divisão, o teorema da Base de Hilbert e o algoritmo de Buchberger.

METODOLOGIA

Nesta apresentação, a metodologia consiste em descrever, por meio de pôster, as atividades desenvolvidas pela discente em sua iniciação científica no período de 2019.1, no qual se dava em exposições semanais com uma hora de duração, onde o orientador indicava problemas e conteúdos relacionados ao tema de estudo, e com isso será apresentado no evento o relatório parcial de seus estudos.

Nos encontros semanais foram abordados assuntos sobre Polinômios e ideais: uma indeterminada e várias indeterminadas; Ordens monomiais e divisão e as Bases de Gröbner, nos quais também estudamos alguns algoritmos, e após o estudo de toda a teoria tentaremos programar em computador, a princípio no Spyder que é um software de programação com linguagem Python, pois existem alguns outros programas matemáticos com esta funcionalidade como, por exemplo, o Maxima, Mathematica, Axiom e Singular.

A UAMat já preparou uma quantidade considerável de matemáticos que hoje são professores universitários, alunos de doutorado, doutores, alunos de mestrado ou mestres. Para este fim, este trabalho dará continuidade a esta característica, faz-se necessária à perpetuação de tais projetos de Iniciação Científica a fim de engajar, cada vez mais cedo, o jovem aluno-pesquisador em atividades que ultrapassem os limites tradicionais curriculares.

Ao final do projeto, o aluno deverá está apto ao estudo Introdutório de Álgebra Comutativa e noções básicas de Geometria Algébrica e PI-álgebra.

DESENVOLVIMENTO

Preliminarmente foi realizado um estudo sobre a teoria de anéis e estudos sobre anéis de polinômios que são alguns dos pré-requisitos básicos para que o aluno venha a ser um pesquisador em Álgebra. Utilizaremos como base de nossos estudos o livro [3]. Podemos citar como ferramenta a utilização das bases de Gröbner e ainda dois algoritmos que são chaves para a teoria (no caso comutativo): Algoritmo da Divisão - este algoritmo decide da

pertinência de um elemento num ideal, dados o elemento e uma Base de Gröbner para o ideal em questão; e, Algoritmo de Buchberger – este constrói uma Base de Gröbner para um ideal, a partir de um conjunto finito de geradores.

O estudo refere-se aos seguintes tópicos: Polinômios e ideais: Em uma ou varias indeterminada; Anéis e Anéis de Polinômios; Ideais; Polinômios sobre um corpo; Fatoração de polinômios e Fatoração à Kronecker; Ideais e geometria; O radical; Ordens monômiais e divisão; Análise do algoritmo de divisão; O teorema de divisão; Bases de Gröbner e suas propriedades; O algoritmo de Buchberger; Critério de Buchberger; Bases de Gröbner reduzidas; e, O problema de pertinência.

Ao final desses estudos teremos desenvolvido um algoritmo que nos permitirá determinar um conjunto de geradores para um ideal dado de modo que um polinômio pertença ao ideal se, e somente se, deixar resto zero na divisão por estes geradores. Através destes estudos iremos desenvolver “maquinário” suficiente para iniciar nossos estudos em Álgebra Comutativa e posteriores sobre sua aplicação computacional à Geometria Algébrica.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Até o presente momento, com esses estudos nos possibilitou resolver problemas como o da descrição de um ideal “Todo ideal I em $K[x_1, \dots, x_n]$ tem um conjunto gerador finito”, o qual foi resolvido ao provarmos o Teorema da Base de Hilbert. E também o da pertinência para ideal de polinômios, em que dado um ideal $I = (f_1, \dots, f_s)$, podemos decidir se um dado polinômio f pertence a I , onde o objetivo é usar o algoritmo de Buchberger e as Bases de Gröbner.

Bem como compreender que as ordens monômiais são de grande importância para os cálculos desses algoritmos com polinômios em várias indeterminadas, pois caso contrário teríamos uma grande confusão ao tentar comparar polinômios a partir de seus graus e saber qual é maior e qual é menor.

Ao final de nossos estudos teóricos o objetivo será conseguir implementar os algoritmos estudados em software computacional que mais se adeque aos nosso objetivos devido a infinidade de programas existentes para tais fins.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É comum, para este tipo de trabalho, divulgar a investigação que está sendo feita no âmbito da iniciação em matemática e com isso preparar o aluno a divulgar a pesquisa científica na área de Matemática, preparando-o para um futuro mestrado acadêmico e assim dando ferramentas suficientes para que o mesmo desenvolva uma boa dissertação.

É de vital importância que tenhamos sempre uma quantidade de cientistas pesquisando questões concernentes a ferramentas para aplicar na PI-álgebra, como: Teoria de Invariantes, representação de grupo, teoria de grupos, Teoria das invariantes, etc.

Este trabalho está em andamento e está sendo desenvolvido no Programa “Pet: Matemática-Estatística” da Universidade Federal de Campina Grande. O mesmo está sendo encaminhado para sua segunda fase, a saber, “aplica-lo a um software específico de matemática”. Sua conclusão se dará no período de 2019.2 e fará parte do Trabalho de Conclusão de Curso da primeira autora.

Palavras-chave: Bases de Gröbner; Algoritmo de Buchberger; Ordenação Monomial.

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, W. W., LOUSTAUNAU, P. *An introduction to Gröbner bases*, American Mathematical Society, Providence, 1994.
- [2] BUCHBERGER, B. *A note on the complexity of constructiong Gröbner-bases*. Computer algebra (London, 1983), Lect. Notes in Comput. Sci., 162, Springer, 1963, 137-145.
- [3] COUTINHO, S. C. *Polinômios e Computação Algébrica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [4] FRALEIGH, J. B. *A First Course in Abstract Algebra*. Sixth Edition, New York: Addison Wesley, 2000.
- [5] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. 5 ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides/IMPA, 1999.
- [6] HERSTEIN, I. N. *Tópicos de Álgebra*. Second Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [7] LANG, S. *Graduate Texts in Mathematics: Algebra*. Rev. 3rd edition, Springer, 2002.