CONGRESSO NACIONAL de PESQUISA e ENSINO em CIÊNCIAS
CONAPESC

CIRCUITO RLC: MODELAGEM DE UM PROBLEMA COM RESISTÊNCIA VARIÁVEL

Simone Taiane Gameleira [1]
José Lira de Oliveira Júnior [2]
Otávio Paulino Lavor [3]

RESUMO

Com a busca pelo conhecimento por parte do homem, foi descoberta o fenômeno físico mais importante para o funcionamento da sociedade moderna, a eletricidade. Hoje, a eletricidade é sem dúvida a principal fonte de energia utilizada pelo homem, devido ao fato de ser facilmente transportada e distribuída, além da sua fácil conversão em outras formas de energia. Desde então, surgiram os eletrônicos que são aparelhos que utilizam a eletricidade, um dos exemplos mais conhecidos é o computador. Na eletrônica se trabalha com circuitos elétricos que é um conjunto de elementos elétricos (resistores, capacitores, indutores, etc.) interligados através de uma placa, no computador temos a placa-mãe como um exemplo de um circuito complexo. Entre os tipos de circuitos, está o circuito RLC, que é constituído de um resistor, um indutor e um capacitor, interligados em série ou em paralelo. O trabalho proposto tem como função analisar um problema para o circuito RLC modelado por uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes variáveis, sendo utilizado como método de resolução o método de séries de potência, chegando assim numa solução analítica para o problema, levando em consideração uma resistência variável.

Palavras-chave: Equações diferenciais, Método de séries, Modelagem matemática.

INTRODUÇÃO

A eletricidade corresponde a uma área da física responsável pelo estudo dos fenômenos associados a cargas elétricas. Pode-se afirmar que sem o estudo sobre a eletricidade a dinâmica atual da sociedade moderna seria inviável, visto que utilizamos a eletricidade constantemente.

Dentro do estudo da eletricidade, encontra-se um assunto relevante que são os circuitos elétricos. Um dos problemas encontrados é o circuito RLC que é formado por uma resistência R, um indutor L e uma capacitância C, o funcionamento do circuito é observada com auxílio de uma chave que interliga duas malhas. Como feito com relação aos circuitos RC e RL, Machado (2012) mostra que para montar o modelo que descreve o circuito RLC se considera as quedas de potencial nos elementos de circuito e as utiliza na lei das malhas.

---

[1] Graduanda do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, taiane340@gmail.com;
[2] Graduando do Curso de Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, jljuniorpb@gmail.com;
[3] Professor adjunto do Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br;

O modelo de circuitos elétricos se dá pelo processo de entendimento de equações que envolvem as derivadas da corrente elétrica que passa pelo circuito em relação ao tempo. Estas equações são denominadas equações diferenciais.

Uma concepção histórica das equações diferenciais, retratada pelo Boyce (2006), afirma que o estudo das mesmas se iniciou no século XVII, pelos matemáticos Issac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Segundo Nóbrega (2016), no desenvolvimento inicial, alguns matemáticos tiveram destaque, onde se pode citar Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange e Laplace.

Diversos livros trazem o problema do circuito RLC com resistência constante, mas neste trabalho, será analisado o circuito RLC com resistência com dependência linear no tempo. Este trabalho consiste na análise matemática do circuito através da resolução de uma equação diferencial com resistência variável.

METODOLOGIA

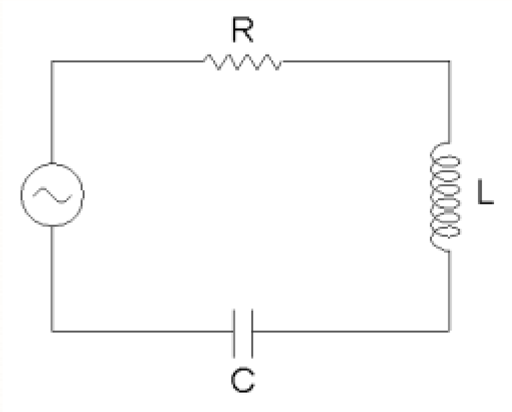
Este trabalho tem como objetivo analisar um circuito cujos componentes são resistor, capacitor e indutor, sendo que vamos obter uma solução para uma equação diferencial deste circuito considerando que a sua resistência irá variar em relação ao tempo conforme uma equação genérica de segundo grau. Ou seja, neste trabalho iremos resolver uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes variáveis, utilizando o método de séries na sua resolução, de forma a obter uma equação que descreva de forma genérica um circuito do tipo RLC.

Para resolver a equação diferencial que representa o circuito RLC com resistência variável foi realizado diversas pesquisas em materiais disponíveis na rede e em livros sobre os conceitos básicos da eletricidade e resoluções de equações diferenciais. Para resolver o problema proposto no artigo foi realizado o estudo do método de séries para resolução de EDO.

REFERENCIAL TEÓRICO

Por definição um circuito RLC é um circuito elétrico no qual os componentes são: um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C). Esses componentes podem estar conectados em série ou em paralelo.

Figura 1: Circuito RLC em série.



Fonte: FAP-0214, 2006.

O resistor é o componente mais comum dos circuitos elétricos, a sua função é limitar o fluxo de corrente que passa pelo circuito. Como o próprio nome sugere, o resistor vai exercer uma resistência à passagem da corrente elétrica. Esse componente pode ser usado como dissipador da energia elétrica, por exemplo convertendo essa energia em energia térmica. A função que fornece o valor da resistência é mostrada abaixo:

$$R = \frac{V}{i}$$

Onde R é a resistência, V é a tensão sobre o resistor e i é a corrente que passa pelo resistor.

Existe também os resistores variáveis, que são aqueles em que a sua resistência pode ser alterada, sendo usados em ajustes ou controles. Os dois tipos mais comuns entre esses resistores são os trimpots e os potenciômetros.

Os trimpots são usados quando não é necessário ajustar o valor da resistência frequentemente. Já os potenciômetros são utilizados como elemento de controle, sendo empregado no controle de volume, velocidade, brilho e etc. Para um resistor variável, a equação que determina a sua resistência é dada pela expressão:

$$R = R_0(1 + \propto \Delta t)$$

O indutor são elementos que podem armazenar energia de natureza magnética em um circuito elétrico. Ele contém dois terminais e é composto por N enrolamentos. Quando os enrolamentos são constituídos de fios ideais, sem resistência elétrica, ele é considerado um indutor ideal. O seu papel é produzir indutância devido a passagem das corrente elétrica, variando com o tempo, nos enrolamentos, causando assim uma tensão auto induzida.

A tensão nos terminais de um indutor é dada pela expressão:

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

Onde V_L é a tensão induzida, L é o coeficiente de indutância e di/dt é a expressão para a variação da corrente com o tempo.

O capacitor pode cumprir diversas funções num circuito elétrico, mas a sua função principal é a de armazenar cargas elétricas. A capacitância é uma propriedade que mede a eficiência dos capacitores, a capacitância é dada pela expressão:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Onde C é a capacitância, Q é o módulo da carga e V é a tensão sobre o capacitor.

Em um circuito de malhas, temos que a diferença de potencial vai ser dada pela expressão:

$$\Delta V = -\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Entretanto, uma malha é um circuito fechado, dessa forma, a integral de linha analisada anteriormente vai resultar em zero. A conclusão desse resultado é que em uma malha fechada a soma algébrica das tensões em cada componente vai resultar em zero, afinal o ponto inicial e final da malha é o mesmo.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foi visto anteriormente que geralmente os resistores de resistência variável variam linearmente e proporcional à variação da temperatura através da equação:

$$R = R_0(1 + \propto \Delta t)$$

Entretanto, neste artigo iremos resolver a equação diferencial considerando uma função diferente, neste caso vamos adotar que a resistência irá variar conforme a equação abaixo:

$$R = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

Aplicando as relações de tensões obtidas para o resistor, capacitor e indutor na lei Kirchhoff das malhas, vamos obter a expressão:

$$V_R + V_C + V_L = 0$$

$$Ri + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

Derivando a equação anterior em relação ao tempo obtemos a expressão abaixo:

$$R\frac{di}{dt} + i\frac{dR}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} = 0$$

Agora substituindo a resistência pela função de segundo grau analisada anteriormente, substituindo a expressão da variação da carga pelo tempo por corrente e isolando a EDO de segunda ordem obtemos a equação abaixo:

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{(\alpha t^2+\beta t+\gamma)}{L}\frac{di}{dt}+\left(\frac{1}{LC}+\frac{2\alpha t+\beta}{L}\right)i=0$$

Partindo da equação diferencial para um circuito RLC com resistência variável e utilizando o método de séries de potência admitimos que a solução i(t) vai ser uma série de potência:

$$i=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$$

Fazendo a primeira derivada e a segunda derivada da corrente e substituindo na equação do circuito, vamos obter a seguinte equação:

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n\,n(n-1)t^{(n-2)}+\frac{\alpha}{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n t^{(n+1)}+\frac{\beta}{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n t^n+\frac{\gamma}{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n t^{(n-1)}$$
$$+\frac{1}{LC}\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n+\;+\frac{2\alpha}{L}\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{(n+1)}+\frac{\beta}{L}\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n=0$$

Agora através de substituições, normalizamos o expoente de t para que seja igual a n e os somatórios para que todos inicializem com n=2, dessa forma, obtemos a equação abaixo:

$$2a_2+6a_3t+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)t^n+\frac{\alpha}{L}\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}(n-1)t^n+\frac{\beta}{L}a_1t$$
$$+\frac{\beta}{L}\sum_{n=2}^{\infty}a_n n t^n+\frac{\gamma}{L}a_1+\frac{2\gamma}{L}a_2t+\frac{\gamma}{L}\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+1}(n+1)t^n+\frac{a_0}{LC}+\frac{a_1t}{LC}$$
$$+\frac{1}{LC}\sum_{n=2}^{\infty}a_n t^n+\frac{2\alpha}{L}a_0t+\frac{2\alpha}{L}\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}t^n+\frac{\beta}{L}a_0+\frac{\beta}{L}a_1t+\frac{\beta}{L}\sum_{n=2}^{\infty}a_n t^n=0$$

Isolando os termos da equação em relação à ordem das potências de t podemos encontrar os valores das constantes ‘a’.

Em relação à potência de ordem 0 encontramos:

$$2a_2+\frac{\gamma}{L}a_1+\frac{a_0}{LC}+\frac{\beta}{L}a_0=0$$

Em relação à potência de ordem 1 encontramos os seguintes termos:

$$6a_3+\frac{\beta}{L}a_1+\frac{2\gamma}{L}a_2+\frac{a_1}{LC}+\frac{2\alpha}{L}a_0+\frac{\beta}{L}a_1=0$$

Agora em relação à ordem n vamos encontrar os seguintes termos:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1)+\frac{\alpha}{L}a_{n-1}(n-1)+\frac{\beta}{L}a_n n+\frac{\gamma}{L}a_{n+1}(n+1)+\frac{1}{LC}a_n+\frac{2\alpha}{L}a_{n-1}$$
$$+\frac{\beta}{L}a_n=0$$

Isolando o termo a_{n+2} acima podemos criar uma função que irá fornecer os valores das constantes 'a' para as posições n≥2. Os valores de 'a' para a posição 2 e 3 podem ser encontradas nas equações anteriores.

$$a_{n+2} = -\frac{\frac{\alpha}{L}a_{n-1}(n-1) + \frac{\beta}{L}a_n n + \frac{\gamma}{L}a_{n+1}(n+1) + \frac{1}{LC}a_n + \frac{2\alpha}{L}a_{n-1} + \frac{\beta}{L}a_n}{(n+1)(n+2)} \quad ,\forall n \geq 2$$

Dessa forma, vamos ter que as constantes 'a' até a ordem 5 são:

$$a_2 = -\frac{\gamma a_1}{2L} - \frac{a_0}{2LC}(1+\beta C)$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{\gamma^2}{6L^2} - \frac{\beta}{3L} - \frac{1}{6LC}\right) + a_0\left(\frac{\gamma}{6CL^2} + \frac{\gamma\beta}{6L^2} - \frac{\alpha}{3L}\right)$$

$$a_4 = a_1\left(-\frac{\alpha}{12L} + \frac{\beta\gamma}{12L^2} - \frac{\gamma^3}{72L^3} + \frac{\gamma\beta}{36L^2} + \frac{\gamma}{72L^2C} + \frac{\gamma}{24L^2C} - \frac{\alpha}{6L} + \frac{\beta\gamma}{24L^2}\right)$$
$$+ a_0\left(\frac{\beta}{12L^2C} + \frac{\beta^2}{12L^2} - \frac{\gamma^2}{72CL^3} - \frac{\gamma^2\beta}{72L^3} + \frac{\alpha\gamma}{36L^2} + \frac{1}{24L^2C^2} + \frac{\beta}{24CL^2} + \frac{\beta}{24L^2C}\right.$$
$$\left. + \frac{\beta^2}{24L^2}\right)$$

$$a_5 = a_1\left(\frac{\gamma\alpha}{20L^2} - \frac{\beta\gamma^2}{40L^3} + \frac{\beta^2}{20L^2} + \frac{\beta}{40L^2C} + \frac{\gamma\alpha}{60L^2} - \frac{\beta\gamma^2}{60L^3} + \frac{\gamma^4}{360L^4} - \frac{\gamma^2\beta}{180L^3} - \frac{\gamma^2}{360L^3C} - \frac{\gamma^2}{120L^3C}\right.$$
$$+ \frac{\gamma^2}{30L^2} - \frac{\beta\gamma^2}{120L^3} - \frac{\gamma^2}{120CL^3} + \frac{\beta}{60CL^2} + \frac{1}{120L^2C^2} + \frac{\gamma\alpha}{20L^2} - \frac{\beta\gamma^2}{120L^3} + \frac{B^2}{60L^2}$$
$$\left. + \frac{\beta}{120L^2C}\right)$$
$$+ a_0\left(\frac{\alpha}{20CL^2} + \frac{\beta\alpha}{20L^2} - \frac{\gamma\beta}{40CL^3} - \frac{\gamma\beta}{40L^3} + \frac{\alpha\beta^2}{20L^2} - \frac{\beta\gamma}{60L^3C} - \frac{\gamma\beta^2}{60L^3} + \frac{\gamma^3}{360CL^4} + \frac{\gamma^3\beta}{360L^4}\right.$$
$$- \frac{\alpha\gamma^2}{180L^3} - \frac{\gamma}{120L^3C^2} - \frac{\beta\gamma}{120CL^3} - \frac{\beta\gamma}{120L^3C} - \frac{\gamma\beta^2}{120L^3} - \frac{\gamma}{120C^2L^3} - \frac{\gamma\beta}{120CL^3} + \frac{\alpha}{60CL^2}$$
$$\left. + \frac{\alpha}{20CL^2} + \frac{\gamma\alpha\beta}{20CL^2} - \frac{\gamma\beta}{120CL^3} - \frac{\gamma\beta^2}{120L^3} + \frac{\beta\alpha}{60L^2}\right)$$

Finalmente, vamos definir a função da corrente do circuito RLC como uma função polinomial, tendo a seguinte forma:

$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \ldots$$

É importante salientar que por ser uma equação diferencial de ordem 2 a equação característica vai ser em função de duas constantes, $a_0 \; e \; a_1$. A equação da corrente para o problema proposto neste artigo toma a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
i(t) = a_0 \Bigg[1 - \frac{(1+\beta C)}{2CL} t^2 + \frac{1}{3L}\left(\frac{\gamma(1+\beta C)}{2LC} - \alpha\right) t^3 \\
+ \frac{1}{12L^2}\left(\frac{2\beta}{C} - \frac{\gamma^2(1+\beta C)}{6LC} + \frac{\alpha\gamma}{3} + \frac{1}{2C^2} + \frac{3\beta^2}{2}\right) t^4 \\
+ \frac{1}{20L^2}\Bigg(\alpha\beta^2 - \frac{\gamma\beta(18+6C+8\beta C)}{12LC} + \frac{\gamma^3(1+\beta C)}{18L^2C} - \frac{\alpha\gamma^2}{9L} - \frac{\gamma}{3LC^2} + \frac{7\alpha}{3C} + \frac{\gamma\alpha\beta}{C} \\
+ \frac{4\beta\alpha}{3}\Bigg) t^5 \Bigg] \\
+ a_1 \Bigg[t - \frac{\gamma}{2L} t^2 + \frac{1}{3L}\left(\frac{\gamma^2}{2L} - \frac{1}{2C} - \beta\right) t^3 + \frac{1}{12L}\left(\frac{\gamma(4+11\beta\gamma)}{6LC} - \frac{\gamma^3}{6L^2} - 3\alpha\right) t^4 \\
+ \frac{1}{20L^2}\left(\frac{7\gamma\alpha}{3} - \frac{\gamma^2(4+23\beta C)}{18LC} + \frac{\beta}{C} + \frac{\gamma^4}{18L^2} + \frac{2\gamma^2}{3} - \frac{\gamma^2}{6C} + \frac{1}{6C^2} + \frac{4\beta^2}{3}\right) t^5 \Bigg]
\end{aligned}
$$

onde $i(t)$ representa uma solução geral para corrente no circuito RLC em um dado tempo t, $\alpha, \beta, e\, \gamma$ são constantes quaisquer para uma variação da resistência, $L\ e\ C$ representam a indutância do indutor e a capacitância do capacitor, respectivamente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi realizada uma análise de um circuito RLC com a resistência variável, tomamos para representar o circuito uma equação obtida através das leis das malhas, então à transformamos em uma equação diferencial de segunda ordem para obter a função da corrente em função do tempo. Por fim, resolvemos a EDO utilizando o método de séries de potências e chegamos a um valor aproximado de uma equação para corrente com coeficiente variáveis. Sendo assim, o método de séries utilizado se mostrou eficiente na obtenção da solução do problema para coeficientes não-constantes.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas**. Ponta Grossa: TODAPALAVRA Editora, 2012. 751 p.

NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. 2016. 49 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó - Rn, 2016. Disponível em: <http://monografias.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/2777/6/Equa%C3%A7%C3%B5es%20diferenciais%20ordin%C3%A1rias%20e%20algumas%20aplica%C3%A7%C3%B5es_Monogr%C3%A1fia_N%C3%B3brega.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2019.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações Diferenciais. 3. Ed. São Paulo: Pearson, 2001.

0214, Fap -. **Circuito RLC série.** 2009. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/239561/mod_resource/content/1/RLC_caos.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2019.