

# CIRCUITO RLC COMO UMA EQUAÇÃO HIPERGEOMÉTRICA CONFLUENTE PARA UMA RESISTÊNCIA COM DEPENDÊNCIA TEMPORAL LINEAR

Davi Ferreira de Lima Silva <sup>1</sup>  
Otavio Paulino Lavor <sup>2</sup>

## RESUMO

Tendo em vista a grande importância dos circuitos elétricos no cotidiano, o amplo campo de aplicações dos mesmos, é de extrema importância o estudo destes. Com a intenção de prever como os circuitos se comportam em seus componentes, se torna imprescindível a tentativa de aproximar cada vez mais a teoria para o mundo real. É importante lembrar que a maioria dos fenômenos naturais são mostrados a partir de modelagens matemáticas, assim como nos circuitos elétricos. Boa parte desses fenômenos podem ser expressos na forma de uma equação diferencial. Com o intuito de desenvolver uma equação que demonstre como o circuito RLC se comporta em situações reais, foi adotado para o mesmo, diferente do que a maioria das literaturas trazem, uma resistência variável, que varia linearmente com o tempo. Para tornar possível a solução do problema, a equação do circuito foi modelada até ser expressa pela equação de hipergeométrica confluyente. Após tal modelagens, conhecendo a solução da equação de hipergeométrica confluyente, chegou-se na solução do circuito RLC com resistência variável.

**Palavras-chave:** Circuitos, Equações diferenciais, Equação de Gauss, Resistência elétrica.

## INTRODUÇÃO

Motivado pelo afeto medo, o conhecimento, segundo a filosofia, encandeou-se. Por medo dos fenômenos naturais o homem percebeu a necessidade de entendê-los para conseguir viver em segurança. Com uso da filosofia, o homem buscou entender os fenômenos naturais e sociais, porém, a comprovação de muitas dessas afirmações só se deu a partir do surgimento da ciência. As ciências naturais, por exemplo, através da física e química, explicam de várias formas alguns dos diversos comportamentos do universo.

Dentre todos os fenômenos que ocupavam os físicos, Silva (2008) afirma que, a eletricidade foi o que trouxe mais contribuições. Ela corresponde a uma área da física responsável pelo estudo dos fenômenos associados a cargas elétricas. Pode-se afirmar que sem o estudo sobre a eletricidade a dinâmica atual da sociedade moderna seria inviável, visto que

---

<sup>1</sup> Graduando do Curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFRSA, [davi\\_tali@hotmail.com](mailto:davi_tali@hotmail.com);

<sup>2</sup> Professor adjunto do Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFRSA, [otavio.lavor@ufersa.edu.br](mailto:otavio.lavor@ufersa.edu.br).

utilizamos a eletricidade constantemente. Esses estudos em sua grande maioria são expressos por modelagens matemáticas, onde as equações diferenciais têm grande participação.

Quando se fala em equações diferenciais, de uma forma mais didática, está se falando, segundo Zill (2007), de equações compostas por derivadas das variáveis dependentes em relação as variáveis independentes. Onde a resolução das mesmas se resume a encontrar funções que satisfazem o outro lado da igualdade.

Uma concepção histórica das equações diferenciais, retratada pelo Boyce (2006), afirma que o estudo das mesmas se iniciou no século XVII, pelos matemáticos Issac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Segundo Nóbrega (2016), no desenvolvimento inicial, alguns matemáticos tiveram destaque, onde se pode citar Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange e Laplace.

Um dos problemas que podem ser manipulados com uma equação diferencial é o circuito RLC. Por definição um circuito RLC é um circuito elétrico no qual os componentes são: um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C). Esses componentes podem estar conectados em série ou em paralelo, o funcionamento do circuito é observado com auxílio de uma chave que interliga duas malhas. Como feito com relação aos circuitos RC e RL, Machado (2012) mostra que para montar a equação diferencial que descreve o circuito RLC se considera as quedas de potencial nos elementos de circuito e as utiliza na lei das malhas.

Entretanto, como nem todos os circuitos são iguais, sofrem variações em seus componentes, principalmente no tocante a sua resistência, se faz necessário o estudo de quando a mesma varia, pela importância para a engenharia em observar resultados em corrente e tensões elétricas quando a resistência não é constante nos circuitos RLC, como propõe o este trabalho, também pela escassez do estudo desse caso, tendo em vista que a maioria das pesquisas são feitas quando a resistência é constante. Onde o trabalho tem objetivo de possibilitar o desenvolvimento e aprimoramento dos conhecimentos em sistemas elétricos.

Quando a resistência do sistema varia se torna possível o manipular a fim de o deixar na forma de uma equação de Hipergeométrica Confluente, onde se dá o ponto de partida desse trabalho. Com isso, com o uso dos conhecimentos em equações diferenciais, é possível chegar a uma solução plausível.

## METODOLOGIA

A metodologia a ser utilizada inicia por uma revisão bibliográfica voltada para métodos de resolução de equações diferenciais e circuitos elétricos de corrente contínua.

Dentro das equações diferenciais, são explorados métodos de resolução de equações com pontos singulares regulares e dentro dos circuitos, destaca-se o estudo por circuito RLC.

O circuito RLC é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes. No entanto ao propor uma resistência variável no tempo, tem-se uma equação linear com coeficientes variáveis. Outras técnicas devem ser utilizadas. Neste trabalho, são utilizadas as técnicas de substituições de variáveis e o problema fica modelado pela equação Hipergeométrica Confluente que é deduzida da equação de Gauss.

Então, o percurso metodológico fica definido pelas seguintes etapas: montagem do circuito RLC, proposta de resistência variável, substituição de variáveis, obtenção da equação Hipergeométrica Confluente e solução analítica do problema estudado.

## DESENVOLVIMENTO

### Equação Hipergeométrica Confluente

Partindo da equação diferencial hipergeométrica,

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \quad (1)$$

podemos encontrar uma outra equação diferencial que aparece frequentemente em problemas físicos. Fazendo

$$x = \frac{z}{\beta} \quad \therefore z = \beta x$$

de modo que, pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \beta \frac{dy}{dz}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} \left( \beta \frac{dy}{dz} \right) = \beta^2 \frac{d^2y}{dz^2}$$

Fazendo essas substituições em (1), temos

$$\frac{z}{\beta} \left( 1 - \frac{z}{\beta} \right) \beta^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \left[ \gamma - (\alpha + \beta + 1) \frac{z}{\beta} \right] \beta \frac{dy}{dz} - \alpha \beta y = 0$$

ou, fazendo algumas simplificações

$$z \left( 1 - \frac{z}{\beta} \right) \frac{d^2y}{dz^2} + \left[ \gamma - \left( \frac{\alpha + 1}{\beta} + 1 \right) z \right] \frac{dy}{dz} - \alpha y = 0 \quad (2)$$

Tomando agora o limite de  $\beta \rightarrow \infty$  em (2), o que é chamado de confluência. Com isso, ficamos com a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{dy}{dz} - \alpha y = 0 \quad (3)$$

que é chamada de equação hipergeométrica confluyente, em que a mesma é uma variação da equação de Gauss.

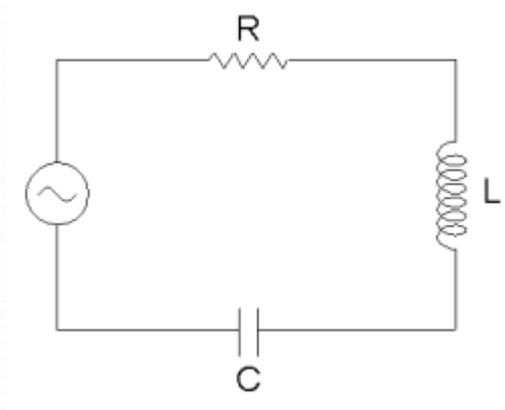
A solução da equação (3) é:

$$\mathfrak{C}(\alpha, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)} z^n \quad (4)$$

## Circuito RLC

O circuito RLC é formado por um resistor  $R$ , um indutor  $L$  e uma capacitor  $C$  que estão ligados em série a uma fonte de tensão  $V$ , como pode ser visto na figura 1.

Figura 1: Circuito RLC



Fonte: FAP-0214, 2006.

Segundo Machado (2012), para montar a equação diferencial que descreve o circuito RLC, considera-se as quedas de potencial nos elementos de circuito e as utiliza na lei das malhas. Deste modo, temos

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad (5)$$

dividindo por  $L$  e derivando em relação a  $t$ ,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (6)$$

ou ainda,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \gamma \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (7)$$

onde  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  e  $\gamma = \frac{R}{L}$ .

Reconhecemos a equação diferencial de um oscilador harmônico onde a resistência introduz o amortecimento. O equivalente mecânico corresponderia à massa, ligada a mola,

oscilando em um fluido viscoso. Usando a notação complexa para a solução, a mesma se apresenta como

$$i(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(w_1 + \varphi) \quad (9)$$

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Deste modo, sabendo que nem todos os circuitos são iguais, sofrem variações em seus componentes, principalmente no tocante a sua resistência, se faz necessário o estudo de quando a mesma varia. Dessa forma, manipularemos a equação do circuito RLC (5) até a transformar em uma equação de Hipergeométrica Conflunte (3), onde a resistência do circuito variará. Assim, dada a equação

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

considerando a resistência como sendo uma função linear, afirma-se que  $R = at + b$ , logo

$$L \frac{di}{dt} + (at + b)i + \frac{q}{C} = 0 \quad (10)$$

derivando a equação (10) em função de  $t$  e sabendo que  $q = it$ , chegamos a

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + ai + (at + b) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Dividindo todos os termos da equação por  $L$ , tem-se

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{at + b}{L}\right) \frac{di}{dt} + \left(\frac{a}{L} + \frac{1}{LC}\right) i = 0 \quad (11)$$

Considerando  $\frac{at+b}{L} = -2x$ , ou seja,  $x = \frac{-at-b}{2L}$  segue que, pela regra da cadeia,

$$\frac{di}{dt} = \frac{di}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{-a}{2L} \frac{di}{dx}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{d^2i}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{di}{dx} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a^2}{4L^2} \frac{d^2i}{dx^2}$$

substituindo na equação (11)

$$\frac{a^2}{4L^2} \frac{d^2i}{dx^2} - 2x - \frac{a}{2L} \frac{di}{dx} + \left( \frac{a}{L} + \frac{1}{LC} \right) i = 0$$

Se  $a = -2L$ , tem-se

$$\frac{d^2i}{dx^2} - 2x \frac{di}{dx} + \left( -2 + \frac{1}{LC} \right) i = 0 \quad (12)$$

Dessa forma, fazemos  $p = -1 + \frac{1}{2LC}$ , chegando ao seguinte resultado

$$\frac{d^2i}{dx^2} - 2x \frac{di}{dx} + pi = 0 \quad (13)$$

Agora, dada a equação (13), é possível modelar afim de chegar na equação hipergeométrica confluyente e para isso se faz necessária, segundo Machado (2012), algumas substituições. Logo, partindo da equação

$$i'' - 2xi' + 2pi = 0$$

podemos definir

$$p = 2m$$

de modo que ficamos com:

$$i'' - 2xi' + 4mi = 0 \quad (14)$$

ou, multiplicando todo os termos por  $x$ ,

$$xi'' - 2x^2i' + 4mxi = 0.$$

Fazendo uma mudança de variável dada por

$$x = \sqrt{z}$$

Com isso, se faz necessário ainda, para fazer a substituição, encontrar  $i'$  e  $i''$  em função da variável  $z$ . Sendo assim,

$$\frac{di}{dz} = \frac{di}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{di}{dx} \Rightarrow y' = 2\sqrt{z} \frac{di}{dz}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2i}{dz^2} &= \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{d}{dz} \left( \frac{di}{dx} \right) - \frac{1}{4\sqrt{z^3}} \frac{di}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{dx}{dz} \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) - \frac{1}{4\sqrt{z^3}} \frac{di}{dx} \end{aligned}$$

fazendo as devidas substituições, dos temos já encontrados,  $i'$  e  $\frac{dx}{dz}$ , temos

$$\frac{d^2i}{dz^2} = \frac{1}{4z} \frac{d^2i}{dx^2} - \frac{1}{2z} \frac{di}{dz} \Rightarrow y'' = 4z \frac{d^2i}{dz^2} + 2 \frac{di}{dz}$$

logo, a equação (14) pode ser escrita como:

$$\sqrt{z} \left( 4z \frac{d^2i}{dz^2} + 2 \frac{di}{dz} \right) - 2z \left( 2\sqrt{z} \frac{di}{dz} \right) + 4m\sqrt{z}i = 0$$

colocando o termo  $4\sqrt{z}$  em evidência, temos

$$4\sqrt{z} \left[ \left( z \frac{d^2i}{dz^2} + \frac{1}{2} \frac{di}{dz} \right) - z \left( \frac{di}{dz} \right) + mi \right] = 0$$

ou

$$zi''' + \left( \frac{1}{2} - z \right) i + mi = 0$$

Que é Hipergeométrica Confluyente para  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

Dessa forma, afim de encontrar a solução (13), basta fazer, de forma reversa, o processo de substituição feitas, na solução na solução da equação Hipergeométrica Confluyente, ou seja, fazemos as substituições  $z = x^2$  e  $m = \frac{p}{2}$ . Assim

$$\mathfrak{C}(p, x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma(n+1)} x^{2n} \quad (15)$$

Agora, afim de encontrar uma solução para o circuito RLC com resistência variável (10), fazemos a substituição  $x = \frac{-at-b}{2L}$  e  $p = -1 + \frac{1}{2LC}$ . Logo,

$$i(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4LC}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4LC} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma(n+1)} \left(\frac{-at-b}{2L}\right)^{2n}$$

Equação essa que fornece a solução analítica da corrente em função do tempo.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, com base em todos os tópicos apresentados, percebeu-se a importância das equações diferenciais para a resolução de problemas físicos com características diversas. Quando tratamos do circuito RLC se notou a importância do estudo do mesmo quando a sua resistência varia na área das engenharias, assim como para o cotidiano, além mostrar sua importância no campo da ciência, tendo em vista que a maioria dos estudos apresentados abordam um circuito com resistência constante. Onde através da equação de Hermite e da sua solução, chegou-se a uma resposta para a expressão do circuito RLC com resistência não constante. Mostrando assim que o conhecimento na área das equações diferenciais é de extrema importância em diversas áreas da ciência, tornando possível e mais simples a solução de diversos problemas.

## REFERÊNCIAS

BARATA, João Carlos Alves. **Curso de Física -Matemática**. Departamento de Física-Matemática da Universidade de São Paulo, Versão de 2017, v.17,

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

GOUVEIA, Tiago da Costa. **Polinômios de Hermite: Uma Aplicação na Mecânica Quântica**. 2014. 33 f. TCC - Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2014.

GRIFFITHS, David J. Mecânica quântica. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas**. Ponta Grossa: TODAPALAVRA Editora, 2012. 751 p.

NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. 2016. 49 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó - Rn, 2016. Disponível em:  
<[http://monografias.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/2777/6/Equa%C3%A7%C3%B5es%20diferenciais%20ordin%C3%A1rias%20e%20algumas%20aplica%C3%A7%C3%B5es\\_Monogr%C3%A1fia\\_N%C3%B3brega.pdf](http://monografias.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/2777/6/Equa%C3%A7%C3%B5es%20diferenciais%20ordin%C3%A1rias%20e%20algumas%20aplica%C3%A7%C3%B5es_Monogr%C3%A1fia_N%C3%B3brega.pdf)>. Acesso em: 10 jun. 2019.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física básica Eletromagnetismo**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher. 1997.

RESNICK, Robert; EISBERG, Robert. **Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. Rio de Janeiro: Campus Ltda, 1979.

SILVA, Cibelle Celestino; PIMENTEL, Ana Carolina. **UMA ANÁLISE DA HISTÓRIA DA ELETRICIDADE PRESENTE EM LIVROS DIDÁTICOS: O CASO DE BENJAMIN FRANKLIN**. 2008. Disponível em:  
<<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/2175-7941.2008v25n1p141/5779>>. Acesso em: 07 jun. 2017.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, c2001. 2 v. ISBN 8534612919 (v.1).

0214, Fap -. **Circuito RLC série**. 2009. Disponível em:  
<[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/239561/mod\\_resource/content/1/RLC\\_caos.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/239561/mod_resource/content/1/RLC_caos.pdf)>. Acesso em: 25 jun. 2019.