CIRCUITO RLC COM RESISTÊNCIA VARIÁVEL COMO UMA EQUAÇÃO DE HERMITE

Davi Ferreira de Lima Silva [1]
Francisco Eduardo Duarte da Silva [2]
José Lira de Oliveira Júnior [3]
Otavio Paulino Lavor [4]

RESUMO

Os circuitos elétricos são os responsáveis pela distribuição da corrente elétrica entre os aparelhos que o constituem, onde, de acordo com esses equipamentos, têm comportamentos diferentes. Desde modo, como nem todos os circuitos são iguais, sofrem variações em seus componentes, principalmente no tocante a sua resistência, se faz necessário o estudo de variações do problema ideal. Uma variação a ser considerada é o circuito RLC com uma resistência que tem dependência temporal. O problema não é mais uma equação com coeficientes constantes como apresentado na literatura e passa a um método de substituição de variáveis e pode ser modelado pela equação de Hermite. Após um as devidas substituições, a equação de Hermite é solucionada e assim, pode ser apresentada a função que descreve o comportamento da corrente em qualquer tempo.

Palavras-chave: Circuito RLC, Equações diferenciais, Equação de Hermite, Resistência variável.

INTRODUÇÃO

O encadeamento do conhecimento, segundo a filosofia, é motivado pelo sentimento chamado medo. Por medo dos fenômenos naturais o ser humano passou a buscar explicações para os mesmos. Com a filosofia, o homem, buscou entender diversos fenômenos sociais e naturais, entretanto, com o surgimento da ciência foi possível a comprovação de muitos desses. As ciências naturais, por exemplo, através da física e química, explicam de várias formas alguns dos diversos comportamentos do universo. Essas explicações, na maioria das vezes, são comprovadas a partir de modelagens matemáticas, onde as equações diferenciais têm papel fundamental para tal.

[1] Graduando do Curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, davi_tali@hotmail.com;
[2] Graduando do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, eduardoduarte12@gmail.com;
[3] Graduando do Curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, jljuniorpb@gmail.com;
[4] Professor adjunto do Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br.

Uma concepção histórica das equações diferenciais, retratada pelo Boyce (2006), afirma que o estudo das mesmas se iniciou no século XVII, pelos matemáticos Issac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Segundo Nóbrega (2016), no desenvolvimento inicial, alguns matemáticos tiveram destaque, onde se pode citar Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange e Laplace.

Apesar de uma pequena atuação na área das equações diferenciais, Newton forneceu, através do desenvolvimento do cálculo e explanação dos princípios básicos da mecânica, uma base para aplicação das equações diferenciais no século XVIII. Ele classificou as equações diferencias de primeira ordem, onde desenvolveu uma técnica para resolver a última equação, usando séries infinitas (BOYCE, 2006).

Assim, no fim do século XVIII, muitos métodos de resoluções de equações diferencias já tinham sido descobertos. Dessa forma, durante o século XIX, procurou-se descobrir métodos menos elementares. A partir do momento que ficou perceptível a grande importância das equações diferenciais em física matemática, as mesmas passaram a ser estudadas, deste modo, muitas funções começaram a frequentemente e foram observadas arduamente. Conhecidas como funções transcendentais, elas levam os nomes de matemáticos como Bessel, Lagrange, Hermite, Hankel, entre outros (NOBREGA, 2016).

Um dos problemas que podem ser manipulados com uma equação diferencial é o circuito RLC. Formado por uma resistência R, um indutor L e uma capacitância C, o funcionamento do circuito é observada com auxílio de uma chave que interliga duas malhas. Como feito com relação aos circuitos RC e RL, Machado (2012) mostra que para montar a equação diferencial que descreve o circuito RLC se considera as quedas de potencial nos elementos de circuito e as utiliza na lei das malhas.

Desde modo, como nem todos os circuitos são iguais, sofrem variações em seus componentes, principalmente no tocante a sua resistência, se faz necessário o estudo de quando a mesma varia, pela importância para a engenharia em observar resultados em corrente e tensões elétricas quando a resistência não é constante nos circuitos RLC, como propõe o este trabalho, também pela escassez do estudo desse caso, tendo em vista que a maioria das pesquisa são feitas quando a resistência é constante. Onde o trabalho tem objetivo de possibilitar o desenvolvimento e aprimoramento dos conhecimentos em sistemas elétricos.

Quando a resistência do sistema varia se torna possível o manipular a fim de o deixar na forma de uma equação de Hermite, onde se dá o ponto de partida desse trabalho. Com isso, com o uso dos conhecimentos em equações diferenciais, é possível chegar a uma solução plausível.

METODOLOGIA

A metodologia a ser utilizada inicia por uma revisão bibliográfica, voltada para métodos de resolução de equações diferenciais e circuitos elétricos de corrente contínua.

Dentro das equações diferenciais, chama a atenção a equação de Hermite que surge do movimento harmônico quântico. A sua solução analítica é obtida pelo método de séries que consiste de um somatório de potências da variável de forma que os coeficientes são obtidos por uma relação de recorrência.

O circuito RLC é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes. No entanto ao propor uma resistência variável no tempo, tem-se uma equação linear com coeficientes variáveis. Outras técnicas devem ser utilizadas. Neste trabalho, são utilizadas as técnicas de substituições de variáveis e o problema fica modelado pela equação de Hermite.

Então, o percurso metodológico fica definido pelas seguintes etapas: montagem do circuito RLC, proposta de resistência variável, substituição de variáveis, obtenção da equação de Hermite e solução analítica do problema estudado

DESENVOLVIMENTO

Equação de Hermite

A teoria quântica de Schrödinger é, segundo Costa (2014), uma equação diferencial, onde sua solução determina a variação da função de onda, que determina o movimento de uma partícula, em função do espaço e do tempo. Como na mecânica clássica, que é governada pela segunda lei de Newton, lei essa considerada a equação do movimento do movimento, na mecânica quântica o análogo a lei de Newton é a equação de Schrödinger para o sistema quântico. Onde, a equação de Hermite surge da equação do oscilador harmônico quântico, quando $2p = (\lambda - 1)$, em que lambida vem do método de separação de variáveis, o método em detalhe pode ser visto em Griffiths (2011) ou em Resnick (1994).

Dessa forma, seja a equação diferencial

$$\frac{d^2w}{dx^2} + (2p + 1 - x^2)w = 0 \tag{1}$$

onde, p é uma constante.

Afim de simplificar a resolução da equação (1), podemos fazer o estudo de quando $|x| \to \infty$, para que as soluções se aproximem de zero. Dessa forma, quando x for muito grande, a parte $(2p + 1)$ se torna desprezível quando comparada a x^2. Logo, se fizermos essa substituição na equação (1) nos aproximamos de:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = x^2 w$$

Fazendo $w = e^{\frac{\pm x^2}{2}}$, temos

$$w'(x) = \pm x e^{\frac{\pm x^2}{2}}$$

$$w'(x) = x^2 e^{\frac{\pm x^2}{2}} \pm e^{\frac{\pm x^2}{2}}.$$

Mais uma vez para x muito grande podemos concluir que o termo $e^{\frac{\pm x^2}{2}}$ é irrelevante, chegando a

$$w''(x) = x^2 e^{\frac{\pm x^2}{2}} = x^2 w.$$

Com isso, podemos dizer que $w = e^{\frac{\pm x^2}{2}}$ seriam soluções aproximadas da equação (1). Sabendo que $e^{\frac{x^2}{2}}$ não tende a zero na condição $|x| \to \infty$, consideraremos apenas $e^{\frac{-x^2}{2}}$ como uma solução aproximada da equação (1).

Tentaremos obter a solução exata de (1) usando soluções na forma:

$$w = y(x) e^{\frac{-x^2}{2}}$$

A função de correção $y(x)$ nos assegurara que a solução encontrada é coerente e não mais uma mera aproximação. Levando em consideração isso, temos que:

$$w'(x) = y'e^{\frac{-x^2}{2}} - xye^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$w''(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}(yx^2 - y - 2y'x + y'')$$

substituindo as expressões mostradas na equação (1) temos a seguinte equação diferencial

$$y'' - 2xy' + 2py = 0 \tag{2}$$

Para a resolução da equação (2), usaremos o método de séries de potência para equações diferenciais em torno do ponto $y_0 = 0$.

Supondo que (2) possua uma solução y da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3}$$

posteriormente se tem:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \tag{4}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \end{aligned} \tag{5}$$

substituindo (3), (4) e (5) na equação (2), tem-se que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n+1} + 2p\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n + 2p\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

ou ainda

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(2p-2n)a_n]x^n = 0.$$

Assim, pela igualdade de polinômios, temos:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2p-2n)a_n = 0$$

Deste modo, ao isolar o termo a_{n+2}, é possível encontrar a equação de recorrência da equação de Hermite, logo temos:

$$a_{n+2} = \frac{(2n-2p)}{(n+2)(n+1)}a_n, \qquad \forall n \geq 0 \tag{6}$$

Com isso, se torna perceptível que, se adotarmos, para n, valores pares, teremos coeficientes em função de a_0, em contrapartida se esses números forem ímpares, teremos coeficientes em ficção de a_1. Analisemos tal afirmativa para n par,

$$n = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{-2p}{1.2}a_0$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = \frac{(4-2p)}{4.3}a_2 = \frac{-2p(4-2p)}{4.3.2}a_0$$

$$n = 4 \Rightarrow a_6 = \frac{(8-2p)}{6.5}a_4 = \frac{-2p(8-2p)(4-2p)}{6.5.4.3.2}a_0$$

$$n = 6 \Rightarrow a_8 = \frac{(12-2p)}{8.7}a_6 = \frac{-2p(12-2p)(8-2p)(4-2p)}{8.7.6.5.4.3.2}a_0$$

$$n = 8 \Rightarrow a_{10} = \frac{(16-2p)}{10.9}a_8 = \frac{-2p(16-2p)(12-2p)(8-2p)(4-2p)}{10.9.8.7.6.5.4.3.2}a_0$$

Percebamos, que olhando para a parcela a_0, é possível colocar o número 2 em evidencia no termo $(2n-2p)$ e que denominador o denominador segue o fatorial do índice $n+2$, isto é,

$$a_{10} = \frac{2(-p).2(8-p).2(6-p).2(4-p).2(2-p)}{10!} a_0$$

$$a_{10} = \frac{2^5 p(p-8)(p-6)(p-4)(p-2)}{10!} a_0$$

É possível verificar ainda que, o produto $(p-8)(p-6)(p-4)(p-2)$ condiz a uma parcela anterior do índice 10, ou seja,

$$a_{10} = a_{2.5} = \frac{2^5 p(p-8)(p-6)(p-4)(p-2)}{10!} a_0$$

Deste modo, podemos generalizar tais cálculos de modo que se chegue a um resultado satisfatório para qualquer índice par. Logo:

$$a_2 = \frac{-2p}{1.2} a_0 \tag{7}$$

$$a_{2i} = 2^i \frac{a_0}{(2i)!} \prod_{k=1}^{i-1} p(p-2k), \qquad \forall i \geq 2 \tag{8}$$

Da mesma forma segue o resultado para os índices ímpares:

$$a_{2i+1} = 2^i \frac{a_0}{(2i+1)!} \prod_{k=1}^{i} (2k-1-p), \qquad \forall i \geq 1 \tag{9}$$

Como mostrado, e dito anteriormente, os fatores com índices pares ficaram em função de a_0 e os com índices impares em função de a_1. Com isso a equação de Hermite (2), terá duas soluções, onde uma terá expoente pares e outra expoentes impares, ou seja,

$$y_1(x) = a_0 - \frac{2p}{2!} x^2 + \frac{4p(p-2)}{4!} x^4 - \frac{8p(p-2)(p-4)}{6!} x^6 + \cdots$$

$$y_2(x) = a_1 x - \frac{2(p-1)}{3!} x^3 + \frac{4p(p-1)(p-3)}{5!} x^5 + \cdots$$

Escrevendo-as de forma compacta, tem-se que:

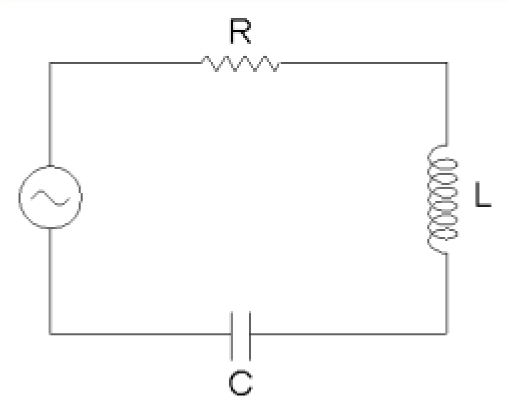
$$y_1(x) = a_0 - \frac{2p}{2!}a_0x^2 + \sum_{i=2}^{\infty}\left[2^i\frac{a_0}{(2i)!}\prod_{k=1}^{i-1}p(p-2k)\right]x^{2i} \tag{10}$$

$$y_2(x) = a_1x + \sum_{i=1}^{\infty}\left[2^i\frac{a_0}{(2i+1)!}\prod_{k=1}^{i}(2k-1-p)\right]x^{2i+1} \tag{11}$$

Circuito RLC

O circuito RLC é formado por um resistor R, um indutor L e uma capacitor C que estão ligados em série a uma fonte de tensão V, como pode ser visto na figura 1.

Figura 1: Circuito RLC



Fonte: FAP-0214, 2006.

Segundo Machado (2012), para montar a equação diferencial que descreve o circuito RLC, considera-se as quedas de potencial nos elementos de circuito e as utiliza na lei das malhas. Deste modo, temos

$$V - L\frac{di}{dt} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \tag{12}$$

onde a carga é representada por q e a corrente por i que se relaciona com a carga através de

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Logo, com essa afirmação, a expressão (14) pode ser reescrita como

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V \tag{13}$$

que dá o modelo para um circuito RLC com resistência constante. Esta equação é linear de segunda ordem com, coeficientes constantes. Na seção seguinte, apresentaremos o modelo e solução para o caso de resistência variável.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Desde modo, sabendo que nem todos os circuitos são iguais, sofrem variações em seus componentes, principalmente no tocante a sua resistência, se faz necessário o estudo de quando a mesma varia. Dessa forma, manipularemos a equação do circuito RLC (14) até a transformar em uma equação de Hermite (2), onde a resistência do circuito variará. Assim, dada a equação

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{q}{C}=V$$

considerando a resistência como sendo uma função linear, afirma-se que $R=at+b$, logo

$$L\frac{di}{dt}+(at+b)i+\frac{q}{C}=V \tag{14}$$

derivando a equação (16) em função de t e sabendo que $q=it$, chegamos a

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+ai+(at+b)\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0$$

dividindo todos os termos da equação por L, tem-se

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\left(\frac{at+b}{L}\right)\frac{di}{dt}+\left(\frac{a}{L}+\frac{1}{LC}\right)i=0 \tag{15}$$

Considerando $\frac{at+b}{L}=-2x$, ou seja, $x=\frac{-at-b}{2L}$ segue que, pela regra da cadeia,

$$\frac{di}{dt}=\frac{di}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{-a}{2L}\frac{di}{dx}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}=\frac{d^2i}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{di}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{a^2}{4L^2}\frac{d^2i}{dx^2}$$

substituindo na equação (17)

$$\frac{a^2}{4L^2}\frac{d^2i}{dx^2} - 2x - \frac{a}{2L}\frac{di}{dx} + \left(\frac{a}{L} + \frac{1}{LC}\right)i = 0$$

Se $a = -2L$, tem-se

$$\frac{d^2i}{dx^2} - 2x\frac{di}{dx} + \left(-2 + \frac{1}{LC}\right)i = 0 \tag{16}$$

Fazendo $p = -1 + \frac{1}{2LC}$, tem-se

$$\frac{d^2i}{dx^2} - 2x\frac{di}{dx} + pi = 0 \tag{17}$$

Que é a equação de Hermite já apresentada pela equação (2). Como deduzimos anteriormente, a solução de (2) é

$$i_1(x) = a_0 - \frac{2p}{2!}a_0x^2 + \sum_{j=2}^{\infty}\left[2^j\frac{a_0}{(2j)!}\prod_{k=1}^{j-1}p(p-2k)\right]x^{2j}$$

$$i_2(x) = a_1x + \sum_{j=1}^{\infty}\left[2^j\frac{a_0}{(2j+1)!}\prod_{k=1}^{j}(2k-1-p)\right]x^{2j+1}.$$

Deste modo, afim de encontrar a solução de (17), fazemos a substituição $p = -1 + \frac{1}{2LC}$ na solução apresentada anteriormente, fazendo também $x = \frac{-at-b}{2L}$. Assim

$$i_1(t) = a_0 - \frac{2p}{2!}a_0\left(\frac{-at-b}{2L}\right)^2$$
$$+ \sum_{j=2}^{\infty}\left[2^j\frac{a_0}{(2j)!}\prod_{k=1}^{j-1}\left(-1+\frac{1}{2LC}\right)\left(-1+\frac{1}{2LC} - 2k\right)\right]\left(\frac{-at-b}{2L}\right)^{2j}$$

$$i_2(t) = a_1\left(\frac{-at-b}{2L}\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\left[2^j \frac{a_0}{(2j+1)!}\prod_{k=1}^{n}\left(2k-1-\left(-1+\frac{1}{2LC}\right)\right)\right]\left(\frac{-at-b}{2L}\right)^{2j+1}$$

Estas são as duas soluções linearmente independes que fornecem as soluções analiíticas da corrente em função do tempo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, com base em todos os tópicos apresentados, percebeu-se a importância das equações diferenciais para a resolução de problemas físicos com características diversas. Quando tratamos do circuito RLC se notou a importância do estudo do mesmo quando a sua resistência varia na área das engenharias, assim como para o cotidiano, além mostrar sua importância no campo da ciência, tendo em vista que a maioria dos estudos apresentados abordam um circuito com resistência constante. Onde através da equação de Hermite e da sua solução, chegou-se a uma resposta para a expresão do circuito RLC com resistência não constante. Mostrando assim que o conhecimeto na área das equações diferenciais é de extrema importância em diversas áreas da ciência, tornando possível e mais simples a solução de diversos problemas.

REFERÊNCIAS

BARATA, João Carlos Alves. **Curso de Física -Matemática**. Departamento de Física-Matemática da Universidade de São Paulo, Versão de 2017, v.17,

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas**. Ponta Grossa: TODAPALAVRA Editora, 2012. 751 p.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, c2001. 2 v. ISBN 8534612919 (v.1).

GOUVEIA, Tiago da Costa. **Polinômios de Hermite: Uma Aplicação na Mecânica Quântica.** 2014. 33 f. TCC - Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Universidade

Federal do Amapá, Macapá, 2014.

NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. 2016. 49 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó - Rn, 2016. Disponível em: <http://monografias.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/2777/6/Equa%C3%A7%C3%B5es%20diferenciais%20ordin%C3%A1rias%20e%20algumas%20aplica%C3%A7%C3%B5es_Monogr%C3%A1fia_N%C3%B3brega.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2019.

GRIFFITHS, David J. Mecânica quântica. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

0214, Fap -. **Circuito RLC série.** 2009. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/239561/mod_resource/content/1/RLC_caos.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2019.

RESNICK, Robert; EISBERG, Robert. **Física Quântica:** Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas. Rio de Janeiro: Campus Ltda, 1979.