SISTEMA MASSA-MOLA COM RIGIDEZ VARIÁVEL: MODELAGEM PELA EQUAÇÃO DE CAUCHY-EULER

Francisco Eduardo Duarte da Silva [1]
Otávio Paulino Lavor [2]

RESUMO
As equações diferenciais são ferramentas bastante utilizadas quando se trata de soluciona problemas físicos de diversos tipos. Voltando-se a tratar destas o presente trabalho apresenta uma breve revisão sobre a equação desenvolvida por Cauchy-Euler. No tocante as indagações físicas existentes, podemos citar uma bastante discutida nas academias que é o do sistema massa-mola, entretanto, este por vezes este é retratado de forma bastante simples, onde, a mola que faz parte do conjunto possui rigidez constante em relação ao tempo. Neste intuito ao tratarmos de um conjunto massa-mola que se dispõe de uma mola com relações temporais, estaríamos relatando um caso que se aproxima aos poucos da realidade. Assim para a solução do mesmo, será utilizada as modelagens matemáticas no intuito de se modelar tal problema através da equação de Cauchy-Euler.

Palavras-chave: Equações diferenciais, Equação de Cauchy-Euler, Oscilador harmônico, Modelagem matemática.

INTRODUÇÃO

Desde o começo dos tempos o homem vem buscando solucionar problemas que existem ao seu entorno, isso teve início por um fato muito intrínseco, ou seja, buscando a própria sobrevivência o ser humano buscou desenvolver meio e técnicas que o propiciassem um modo de vida seguro. Entretanto, com o passar das décadas ou até mesmo de eras a busca pelo conhecimento se tornou algo que ia além da sobrevivência e pessoas começaram a ir atrás do conhecimento por mera curiosidade, assim quem busca o sabe apenas pelo saber foi denominado de filosofo. Por muito tempo esses englobavam todas as áreas do conhecimento, contudo, com o passar dos anos a filosofia foi se ramificando em várias áreas onde, então surgiu a filosofia natural que hoje e denominada de ciência.

Na ciência teve-se um desenvolvimento das equações diferenciais ferramenta poderosíssima para solucionar problemas de diversos tipos, com um bom entendimento das equações diferenciais, assim como das modelagens matemáticas as barreiras para solucionar não só problemas físicos, mas uma gama infinita de problemas existentes, bem menores.

[1] Graduando pelo Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, eduardoduarte12@gmail.com;
[2]Professor orientador: Doutor, Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br.

Dessa forma seja para estudar o crescimento da população em determinada região ou entender o movimento dos corpos celestes, podemos (ou tentamos) desenvolver um modelo matemático capaz de descrever determinado fenômeno. De acordo com Zill (2016, p. 21), um modelo matemático começa com a identificação das variáveis responsáveis pela variação do sistema e depois a elaboração de um conjunto de hipóteses razoáveis, e estas dependerão de quão preciso o modelo precisa ser.

Neste intuito o presente artigo vem tratar de um problema comumente retratado nas academias, voltadas às ciências exatas que é o do sistema massa-mola, tal problema e introduzido de forma simples e bastante idealiza. Onde tantos os professores como também as literaturas existentes comumente tratam o mesmo com uma mola que possui tanto rigidez como massa constante em relação ao tempo. Entretanto, sabemos que na realidade esse sistema está sujeito a diversos outros fatores tais como dissipação de energia térmica, mola que por vezes possui rigidez variável em relação ao tempo. Neste intuito solucionar um sistema massa-mola que se disponha de uma mola com rigidez variável em ralação ao tempo, não só estaríamos tratando de um caso mais complexo, como também de um caso que se aproxima aos poucos a realidade.

METODOLOGIA

A metodologia a ser usada nesse trabalho será uma revisão bibliográfica em referências clássicas voltadas para estudo de equações diferenciais, como também análise de literaturas que retratem as leis de Newton bem como alguns princípios destas. Asim tais referências são Zill (2016), Boyce (2006), Barata (2018) e Machado (2014), assim como autores que apresentam o problema do sistema massa-mola, como Nussenzveig (2002) e Halliday et al. (2011). A partir daí foi possível definir conceitos imprescindíveis para a elaboração do trabalho. Fazendo a modelagem matemática do problema por métodos analíticos, logo após, discutimos os resultados e as conclusões que podemos tomar por estes.

Outro ponto será aprofunda-se nas deduções matemáticas com princípios de se obter a equação que descreva um sistema massa-mola de rigidez variável e ainda com base em modelagens obter a equação de airy partindo da equação deduzida do sistema massa-mola.

DESENVOLVIMENTO

De início antes de começar a se falar do problema de um sistema massa-mola é imprescindível entender o que seria uma equação diferencial. De forma que estas são basicamente equações que contêm derivadas ou diferenciais de uma função que dependa de uma, ou mais variáveis com relação a uma, ou mais variáveis independentes. A resolução destas é voltada a encontrar uma função a qual seja infinitamente derivável dentro de um intervalo pré-definido, ao qual está satisfaça a igualde pré-existente. Dentre essas podem existir equações diferenciais ordinárias quando as derivadas dessa são em relação a apenas uma variável ou as equações diferenciais parciais onde as derivadas desta são em relação à duas, ou mais variáveis. Como exemplos, temos:

$$\frac{dy}{dx} = 8 \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

As equações (1) e (2), são equações diferenciais ordinárias (EDO'S), pois, elas contêm derivadas ordinárias com relação a uma única variável dependente, onde, por exemplo, a equação (1) a variável dependente seria $y = y(x)$ é variável independente seria x. Nas equações (3) e (4), temos que estas possuem derivadas parciais em relação à duas ou mais variáveis independentes, portanto, são denominadas de equações diferenciais parciais (EDP'S).

Para encontrar as soluções destas equações existem inúmeras maneiras, tais como separação de variáveis, método de Cauchy-Euler, método de séries de potências dentre outros inúmeros existentes.

As equações que aqui trataremos serão sempre EDOs, portanto, é importante ressaltar sobre as soluções de uma equação diferencial ordinária.

Definição 1: Toda função Ω que for n-vezes diferenciável, definida em um intervalo limitado I, é tida como solução da equação diferencial de ordem n, se ao substituirmos Ω e suas derivadas na equação, a equação for reduzida a uma identidade, ou seja, se ao substituir a mesma as igualdes pré-existentes devem permanecer válidas.

De acordo com Zill (2016, p. 171), uma **equação de Cauchy-Euler** é a equação diferencial linear da forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \tag{5}$$

Iremos tratar da solução para a equação de Cauchy-Euler de segunda ordem homogênea, isto é,

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy \; = \; 0 \tag{6}$$

Dessa forma supondo uma da forma $y = x^m$, onde m deve ser determinado. Temos que:

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = (am(m-1) + bm + c)x^m \tag{7}$$

Assim, é notório que $y = x^m$ será uma solução da equação diferencial sempre que m for uma solução da equação característica apresentada logo abaixo:

$$am(m-1) + bm + c = 0 \;\Rightarrow am^2 + (b-a)m + c = 0 \tag{8}$$

A equação acima é quadrática, portanto, devemos considerar três casos distintos, estes serão: caso (i) onde teremos raízes reais e distintas, o caso (ii) com raízes repetidas e o caso (iii) com raízes complexas e conjugadas.

Para o primeiro caso temos $m_1 \neq m_2$, logo, a solução geral será:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \tag{9}$$

No segundo caso, onde $m_1 = m_2 = m$, a solução geral é será:

$$y = c_1 x^m + c_2 x^m \cdot ln\, x \tag{10}$$

Por fim, para o terceiro caso, $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, a solução geral é:

(11)

$$y = x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$$

Sistema Massa-Mola

O sistema massa-mola como já citado é um dos problemas clássicos da Física, consiste em um objeto de massa *m* qualquer acoplado a uma mola de rigidez *k.* quando tal conjunto sofre o efeito de uma força, ou seja, alguma perturbação externa momentânea, fazendo com que o objeto de massa m sai do repouso se deslocando, experimentalmente, verifica-se que a mola exerce uma força restauradora no corpo de massa m, e a intensidade dessa força (supondo movimento unidimensional) é dada pela equação a seguir, conhecida como Lei de Hooke:

$$F(x) = -kx \tag{12}$$

O sinal negativo na Lei de Hooke indica que a força exercida pela mola e restauradora, ou seja, a força F(x) sempre irá se opor ao movimento, portanto, se for dado um referencial inercial, quando o deslocamento da mola é negativo, a força elástica será no sentido positivo do eixo, e vice-versa.

Para o estudo do sistema massa-mola é imprescindível recordar a segunda lei de Newton, publicada em seu livro *Philosophiae naturalis principia mathematica*:

Definição 3: A variação do momento é proporcional à força impressa, e tem a mesma direção da força. Matematicamente (para uma massa *m* constante), temos:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{13}$$

Onde $\vec{m}$ é a massa do corpo, e $\vec{a}$ a sua aceleração, que é respectivamente as derivadas de primeira e segunda ordem da posição *x* em (14).

Quando o sistema está em repouso, a seguinte afirmação e valida,

$$m\vec{a} = 0 \therefore a = 0 \tag{14}$$

Agora, suponha uma força externa que age momentaneamente imprimindo uma aceleração ao bloco de massa m, o deslocando a uma distância x do ponto inicial e após cessa sua ação, caso não haja outras forças no sistema, a única força que irá atuar sobre o corpo é a força restauradora da mola que é contrária ao movimento, logo, de acordo com a segunda lei de Newton, temos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{15}$$

Salientando que como já citado o termo $\frac{d^2x}{dt^2}$ refere-se a aceleração do objeto. Agora, portanto, dividindo ambos os membros por m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{16}$$

Já que consideramos um movimento unidimensional do sistema, a notação vetorial não se faz necessária.

Por fim, chegamos na equação abaixo que, pelas definições que vimos anteriormente, é uma equação diferencial linear ordinária de segunda ordem, onde, matematicamente representa o movimento harmônico simples (MHS).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{17}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir de todo o aporte teórico apresentado até o momento iremos buscar uma equação que modele o sistema massa-mola com uma rigidez (k) variável em relação ao tempo. Partiremos da equação (19). Se tivermos uma rigidez do tipo:

$$k = \frac{A}{t^2} \tag{18}$$

A equação do sistema massa-mola pode ser dada como segue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{At^{-2}}{m}x = 0 \tag{19}$$

Agora, propondo uma substituição do tipo.

$$u = t^{-2} \tag{20}$$

Temos que,

$$u' = -2t^{-3} \rightarrow u" = 6t^{-4} \tag{21}$$

Assim pela regra da cadeia podemos obter,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du}\frac{du}{dt} \tag{22}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{du}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{du}\frac{d^2u}{dt^2} \tag{23}$$

Portanto, se substituirmos as equações (21), (22) e (23) na equação (19) ficamos com:

$$4t^{-6}\frac{d^2x}{du^2} + 6t^{-4}\frac{dx}{du} + \frac{Au}{m}x = 0 \tag{24}$$

Dessa forma como $u = t^{-2}$, ficamos com:

$$4u^2\frac{d^2x}{du^2} + 6u\frac{dx}{du} + \frac{Ax}{m} = 0 \tag{25}$$

Nota-se que a equação (25) é uma equação de Cauchy-Euler, já que A, m, 4 e 6 são constantes.

Supondo uma solução da forma $z = u^j$. Assim, a equação característica descrita por (8) é:

$$4j^2 + (6)j + \left(\frac{a}{m}\right) = 0 \tag{26}$$

Calculando o discriminante, temos que:

$$\Delta = 32 - 16\frac{A}{m} \tag{27}$$

Então,

$$j = -6 \pm \sqrt{32 - 16\frac{A}{m}} \tag{28}$$

Como a fração $\frac{k}{4A}$ é um valor negativo, teremos três casos possíveis, assim:

Se $16\frac{A}{m} < 32$, a raiz se torna positiva e temos:

$$\begin{gathered} j_1 = -6 + \sqrt{32 - 16\frac{A}{m}} \\ j_2 = -6 - \sqrt{32 - 16\frac{A}{m}} \end{gathered} \tag{29}$$

Se $\frac{k}{4A} = \frac{1}{16}$,

$$j_1 = j_2 = -6 \tag{30}$$

Se $\frac{k}{4A} > \frac{1}{16}$,

$$\begin{gathered} j_1 = -6 + i\sqrt{32 - 16\frac{A}{m}} \\ j_2 = -6 - i\sqrt{32 - 16\frac{A}{m}} \end{gathered} \tag{31}$$

Aqui, percebemos que $\alpha = -6$ e $\beta = \sqrt{32 - 16\frac{A}{m}}$. Portanto, a solução para o primeiro caso é

$$z(u) = c_1 u^{j_1} + c_2 u^{j_2} \tag{32}$$

Voltando à variável inicial,

$$x(u) = (u) \Longrightarrow x(t) = t^{-2} \tag{33}$$

Isto é,

$$x(t) = \left[c_1 t^{-2j_1} + c_2 t^{-2j_2}\right] \tag{34}$$

Similarmente, as soluções para o segundo e terceiro caso são, respectivamente, da seguinte forma:

$$x(t) = \left[c_1 t^{-2j_1} + c_2 t^{-2j_2}\, ln(At)\right]$$

$$x(t) = t^{12}[c_1 \, cos(\beta \, ln(t^{-2})) + c_2 \, sin(\beta \ln(t^{-2}))] \tag{35}$$

As equações (33), (34) e (35) expressam a posição do bloco em qualquer instante de tempo e são, portanto, as soluções analíticas para o problema proposto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, diante de todo o aporte teórico apresentado e os resultados obtidos, podemos concluir que o uso das equações diferenciais para solução de problemas físicos, não só o apresentado, mas, os diversos existentes e bastante eficiente. Ao tratarmos de um sistema massa-mola com uma rigidez variável em ralação ao tempo, foi possível perceber um dos fatores que influenciam no desempenho desse sistema em casos reais. Assim sendo, os objetivos estabelecidos foram alcançados, ou seja, este trabalho pode servir de base para uma revisão teórica de equações diferenciais, e, principalmente para dar continuidade ao mesmo que pode não só ser tratado com uma rigidez variável, mas, também com uma massa dentre outros fatores, possibilitando assim o emprego de outros tipos de equação diferenciais.

REFERÊNCIAS

BARATA, J. C. A. **Curso de Física - Matemática**. Departamento de Física-Matemática da Universidade de São Paulo, Versão de 2018, v.17.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

CAJORI, Florian. **A history of mathematics**. The MacMillan Company, 1909.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física: Mecânica**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas à física**. Editora UEPG, 2004.

NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó - RN, 2016. Disponível em: https://monografias.ufrn.br/jspui/handle/123456789/2777. Acesso em: 04 out. 2018

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica**, Vol. 1 (4ª edição). São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, c2001. 2 v. ISBN 8534612919 (v.1).