

## USO DO GEOGEBRA NA VERIFICAÇÃO DE PADRÕES DE LADRILHAMENTOS COM POLÍGONOS REGULARES

Matheus Gabriel Nascimento Lima<sup>1</sup>  
Abigail Fregni Lins<sup>2</sup>

### RESUMO

O presente artigo é fruto de um trabalho desenvolvido na disciplina obrigatória Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, Campus I, cujo objetivo é o de explorar um conteúdo matemático fazendo uso de um aplicativo para o ensino da Matemática. Com isso, utilizamos o aplicativo GeoGebra para explorar de maneira interdisciplinar a Geometria Plana que há nos padrões de Ladrilhamentos feitos com polígonos regulares. Neste caso, um padrão de Ladrilhamento se refere a sequência de distribuição dos polígonos no plano. Assim, trabalhamos com conceitos dados que nos possibilitou saber se um padrão de Ladrilhamento é possível ou não. Dessa forma, com o aplicativo GeoGebra pudemos construir polígonos e segmentos de reta, obtendo uma melhor visualização na verificação de alguns padrões. Ressaltamos que este trabalho pode vir a ser utilizado como proposta de aula para os anos finais do Ensino Fundamental no Laboratório de Informática, preferencialmente para alunos de escolas públicas.

**Palavras-chave:** GeoGebra, Geometria Plana, Ladrilhamento, Polígonos, Padrões de Ladrilhamento.

### EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E O USO DA TECNOLOGIA

A necessidade da utilização de tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática é indiscutível, visto que nossa sociedade está tomada por uma cultura digital. Para Cataneo (2011), tal utilização promoverá uma formação historicamente situada. Além disso, a forma como a tecnologia pode ser introduzida de maneira interativa com “a representação dos objetos matemáticos na tela do computador possibilitará ao aluno a visualização, representação e a manipulação desses objetos, favorecendo o processo de aprendizagem” (CATANEO, 2011, p. 30).

Atualmente existem muitos aplicativos gratuitos voltados à educação matemática que oferecem recursos para se trabalhar diversos assuntos. Gravina (1999) afirma que:

a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o “fazer matemática”: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo,

---

1 Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, matheusgabrielnascimentolima@gmail.com

2 Professor orientador: Doutora, Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, bibilins@gmail.com

diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento (GRAVINA, 1999, p. 73).

Desse modo, aplicativos que apresentam potentes ferramentas para o ensino e aprendizagem da Matemática, como o GeoGebra, são relevantes para serem utilizados como objeto investigador de conteúdos matemáticos.

O GeoGebra, aplicativo gratuito de matemática dinâmica voltado à educação matemática, foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter, <https://www.geogebra.org/about>. Nele se pode trabalhar assuntos matemáticos de todos os níveis de ensino com eficiência, como, por exemplo, Álgebra, Gráficos, Probabilidade e Geometria.

Na internet o leitor pode encontrar vídeo aulas sobre o GeoGebra <https://www.youtube.com/watch?v=9-orPBR1TXo&list=PL8884F539CF7C4DE3> e manuais [http://w3.ufsm.br/petmatematica/images/minicursos/GeoGebra/Apostila\\_GeoGebra.pdf](http://w3.ufsm.br/petmatematica/images/minicursos/GeoGebra/Apostila_GeoGebra.pdf).

## **LADRILHOS E LADRILHAMENTO BEM COMPORTADO**

Ladrilhar uma superfície plana é o mesmo que preenchê-la com figuras regulares ou irregulares de modo que não haja sobreposição ou lacunas entre elas. Desde 4000 a.C, os ladrilhos eram usados pelos egípcios e outros povos para decoração de castelos e templos (DIAS e SAMPAIO, 2010) e é interessante notar que, mesmo depois de tanto tempo, ainda é possível ver essas obras de arte em diversos lugares. Isso conduz a uma visão interdisciplinar e vai ao encontro do que sugere os PCN:

é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 51).

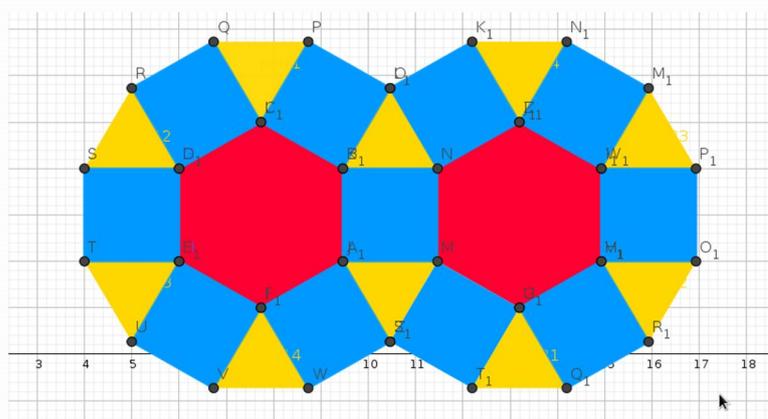
Estudos levam a crença de que o astrônomo Joannes Kepler (1571-1630) pode ter sido o primeiro a estudar a geometria dos Ladrilhamentos do plano. Ele classifica os polígonos utilizados em um Ladrilhamento como Ladrilhos.

Um Ladrilhamento feito apenas com polígonos regulares é chamado de Ladrilhamento bem comportado e esse tipo de Ladrilhamento no plano será o objeto de estudo. Gomes (2017), sustenta a ideia de que o software GeoGebra pode ser uma boa ferramenta para o estudo de Ladrilhamento no Plano, pois para ele é possível “aprender conceitos geométricos que, por vezes, são trabalhados em sala de aula sem uma construção prática” (GOMES, 2017, p. 13).

## PADRÕES DE LADRILHAMENTO

Primeiramente, ressaltamos que todos os Ladrilhos presentes neste trabalho foram feitos no aplicativo GeoGebra pelos autores. Na Figura 1 temos triângulos, quadrados e hexágonos, ladrilhando o plano. Observem que nela podemos repetir a mesma sequência de polígonos infinitas vezes e essa sequência é nomeada de padrão de Ladrilhamento:

**Figura 1:** Ladrilhamento bem comportado no aplicativo GeoGebra



Fonte: autoria própria

Para classificarmos um padrão de Ladrilhamento bem comportado escolhemos um vértice qualquer e “damos uma volta completa em torno deste vértice, no sentido anti-horário ou horário. Anotamos, sequencialmente, o número de lados dos polígonos regulares que se agrupam em torno do vértice” (DIAS e SAMPAIO, 2010, p. 29).

Assim, para a Figura 1, escolhendo o vértice  $N$ , por exemplo, e partindo do triângulo, temos o padrão de Ladrilhamento  $(3,4,6,4)$ , em que cada número corresponde a quantidade de lados do triângulo, quadrado, hexágono e quadrado, respectivamente.

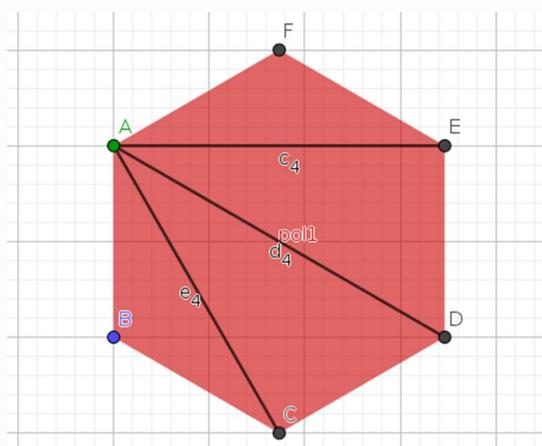
Os polígonos utilizados nesse padrão de Ladrilhamento são regulares porque possuem todos os lados de mesma medida e ângulos internos congruentes. Dessa maneira, com um ou mais tipos de polígonos regulares com lados de mesma medida podemos ladrilhar um plano. Mas nem toda combinação desses polígonos constituem um padrão de Ladrilhamento.

Podemos chegar aos padrões de Ladrilhamentos bem comportados por meio de sucessivas tentativas. Porém, há uma regra básica associada às medidas dos ângulos internos dos polígonos utilizados no Ladrilhamento que nos permite obter uma característica comum a esses padrões, e verificar se são possíveis ou não. Portanto, é conveniente mostrar como

conhecer as medidas dos ângulos internos de qualquer polígono regular para, seguidamente, verificarmos alguns padrões de Ladrilhamento com o GeoGebra.

Para isso, consideremos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de  $180^\circ$  e usemos como exemplo o hexágono:

**Figura 2:** Hexágono particionado em quatro triângulos no aplicativo GeoGebra



Fonte: autoria própria

A partir de um vértice qualquer podemos traçar três diagonais e assim notarmos que são formados quatro triângulos. A soma dos ângulos internos dos quatro triângulos definidos corresponde à soma dos ângulos internos do hexágono.

De forma análoga, se considerarmos um polígono regular de  $n$  lados podemos particioná-lo em  $n-2$  triângulos e chegarmos ao seguinte resultado:

considerando-se um polígono convexo de  $n$  lados, a soma de todos os ângulos internos dos  $n-2$  triângulos assim definidos coincidirá com a soma dos ângulos internos do polígono, sendo, portanto, igual a  $(n-2) \cdot 180^\circ$  (DIAS e SAMPAIO, 2010, p. 44).

Feito isso, como sabemos que um polígono regular possui ângulos internos de mesma medida, e também que a quantidade de lados que um polígono tem é a mesma quantidade de ângulos internos, então considerando um polígono regular com  $n$  lados, ou seja,  $n$  ângulos internos, e sendo  $\alpha$  a medida dos ângulos internos, pela definição de Dias e Sampaio (2010), temos que:

$$\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

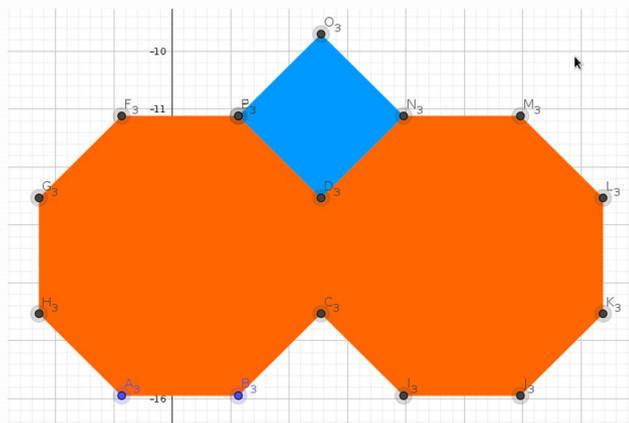
## VERIFICAÇÃO DE ALGUNS PADRÕES DE LADRILHAMENTO

Nosso trabalho tem como enfoque verificar, a partir de conceitos dados, se um padrão de Ladrilhamento bem comportado é possível ou não, fazendo assim construções no GeoGebra.

Inicialmente decidimos trabalhar o Ladrilhamento do Plano com polígonos regulares, visto que dentro desse tema é possível o estudo de diversos conceitos geométricos. Posteriormente escolhemos o aplicativo GeoGebra para a construção dos polígonos e Ladrilhos, pela vasta quantidade de ferramentas que o mesmo oferece.

Utilizaremos o GeoGebra para construir padrões de Ladrilhamentos com polígonos regulares e verificaremos a validade deles por meio de uma regra básica. Primeiramente, vejamos os ladrilhos da Figura:

**Figura 3:** Padrão de Ladrilhamento (8,4,8) no aplicativo GeoGebra



Fonte: autoria própria

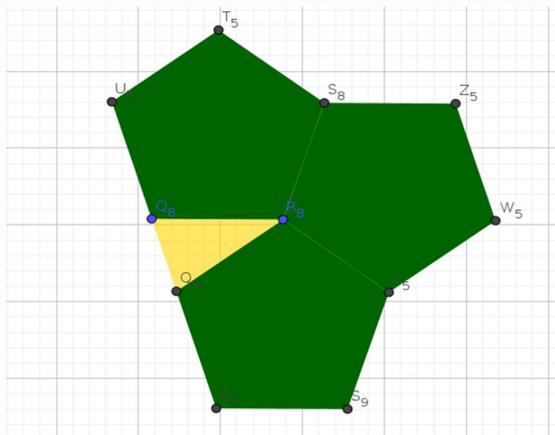
Este Ladrilhamento tem como padrão (8,4,8). Ao calcular a medida dos ângulos internos de cada polígono presente neste padrão, notamos que a soma dos ângulos adjacentes ao vértice comum aos três polígonos é:

$$135^{\circ} + 135^{\circ} + 90^{\circ} = 360^{\circ}$$

Dessa forma podemos afirmar que este é *um padrão de Ladrilhamento bem comportado*.

Entretanto, isso não ocorre na Figura 4, pois a soma dos ângulos internos dos pentágonos que compartilham o mesmo vértice é  $324^{\circ}$ , não cabendo qualquer outro polígono regular no espaço em amarelo, *o que não caracteriza um padrão de Ladrilhamento bem comportado*. Além disso, não caberia qualquer outro polígono regular no espaço em amarelo, pois, nele, o ângulo comum aos três pentágonos é  $36^{\circ}$ :

**Figura 4:** Ladrilhamento não caracterizado bem comportado no aplicativo GeoGebra



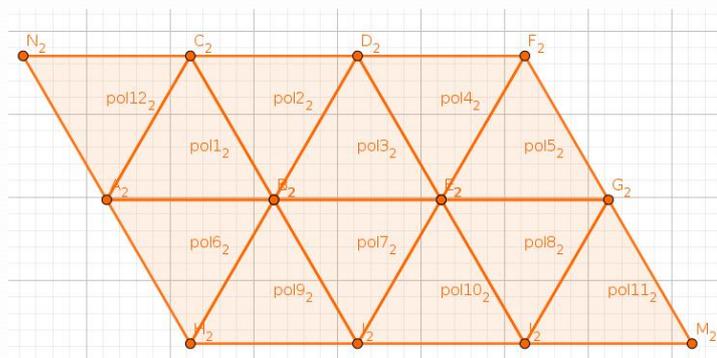
Fonte: autoria própria

Logo, concluímos que “em um ladrilhamento a soma dos vários ângulos que se posicionam em torno de cada vértice é o ângulo de uma volta completa, ou seja,  $360^\circ$ ” (DIAS e SAMPAIO, 2010, p. 48).

Esse resultado nos permite saber se diversos padrões de Ladrilhamento bem comportados são possíveis ou não. Para isso, basta calcular a medida dos ângulos internos dos polígonos utilizados. Assim, podemos verificar, por exemplo, que existem apenas três padrões de Ladrilhamentos em que são utilizados um único tipo de polígono regular, sendo eles  $(4,4,4,4)$ ,  $(3,3,3,3,3,3)$  e  $(6,6,6)$ . Verificamos isso somando os ângulos internos dos polígonos que formam cada padrão.

Na Figura 5 temos o padrão de Ladrilhamento  $(3,3,3,3,3,3)$ , ou seja, há seis triângulos equiláteros em torno de cada vértice:

**Figura 5:** Padrão de Ladrilhamento  $(3,3,3,3,3,3)$  no aplicativo GeoGebra



Fonte: autoria própria

Como cada ângulo mede  $60^\circ$ , então:

$$60^{\circ}+60^{\circ}+60^{\circ}+60^{\circ}+60^{\circ}+60^{\circ}=360^{\circ}$$

Logo, a soma dos ângulos adjacentes a cada vértice é  $360^{\circ}$ . Dessa forma, podemos chegar a diversos outros padrões de Ladrilhamentos bem comportados.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que o uso de aplicativos voltados à Educação Matemática possibilita o que Cataneo (2011) define como uma formação historicamente situada, já que a tecnologia está tão presente em nosso dia a dia. Além disso, tal uso pode promover uma melhor visualização e interpretação dos conteúdos. Com isso, o aplicativo GeoGebra é um ambiente ideal para experimentar, verificar, generalizar e demonstrar resultados, corroborando com Gravina (1999) quando afirma que neste contexto a aprendizagem depende de ações que caracterizam o *fazer matemática*.

Como vimos, o Ladrilhamento do plano existe há milhares de anos e até hoje podemos vê-los em diversos lugares, como paredes, calçadas, azulejos para cozinha e são considerados verdadeiras obras de arte. Além disso, ele possui diversos tipos, que se diferenciam de acordo com as figuras que são utilizadas. Portanto, é importante ressaltar que em nosso trabalho consideramos apenas os Ladrilhamentos bem comportados, ou seja, aqueles feitos com polígonos regulares.

Como sugerem os PCN (1998), é importante que a Geometria seja estudada traçando um paralelo com o mundo material. Daí surge a oportunidade de se estudar conceitos geométricos a partir de Ladrilhamentos do plano a estabelecer uma relação entre Matemática e arte dos Ladrilhamentos, provocando interdisciplinaridade.

No desenvolvimento do trabalho notamos a facilidade de se deduzir a fórmula da medida do ângulo interno de um polígono regular. Fizemos isso por meio da construção de um hexágono, particionando o mesmo em 4 triângulos, e por fim generalizamos o resultado para um polígono regular qualquer. Isso é possível porque o aplicativo GeoGebra oferece todas as ferramentas necessárias para a construção dos Ladrilhamentos, bem como dos polígonos e segmentos de reta, possibilitando visualização e manipulação dos objetos construídos (CATANEO, 2011).

Além disso, ressaltamos que nosso trabalho pode vir a ser utilizado como proposta de aula para os anos finais do Ensino Fundamental no Laboratório de Informática, preferencialmente para alunos de escolas públicas.

Na verdade, tomamos a iniciativa de submeter nosso trabalho como proposta de aula de forma sucinta em formato de pôster (aceito) ao mesmo evento científico, objetivando impulsionar o uso do aplicativo GeoGebra no ensino e aprendizagem da Matemática.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

SAMPAIO, João Carlos Vieira; DIAS, Claudio Carlos. **Matemática na Prática: curso de profissionalização para professores do Ensino Médio de Matemática**. Central de Texto. São Paulo: 2010.

GOMES, Thiago de Azevedo. **Ladrilhamento no Plano com o uso do software GeoGebra**. Dissertação de Mestrado da Universidade do Grande Rio - UNIGRANRIO. 88 f. Duque de Caxias, RJ: 2017.

CATANEO, Vanessa Isabel. **O uso do software GeoGebra como ferramenta que pode facilitar o processo de ensino aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental séries Finais**. Monografia de Especialização em Educação Matemática do Centro Universitário Barriga Verde - UNIBAVE. 86 f. Orleans, SC: 2011.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria Costi. **Informática na Educação: Teoria e Prática. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. Curso de Pós-Graduação em Informática na Educação - UFRGS. 15f. Porto Alegre, RS:1999.

BURATTO, Ivone Catarina Freitas. **Representação Semiótica no Ensino da Geometria: uma alternativa metodológica na formação de professores**. Dissertação de Mestrado da Universidade Federal De Santa Catarina - UFSC. 143 f. Florianópolis, SC: 2006.

Clubes de Matemática da OBMEP: disseminando o estudo da Matemática. **Sala de Atividades: Pavimentação – Sala1**. Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-1/#O2>>. Acesso em: 15 de abril de 2019.

**GEOGEBRA**. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/about>>. Acesso em 12 de abril de 2019