

## SOMAS DE RIEMANN E TEOREMA FUNDAMENTAL: CONTEXTUALIZAÇÃO EM LIVROS DE CÁLCULO

Cáren Beatriz dos Santos Felix da Silva<sup>1</sup>

Quércia Carvalho Eloi<sup>2</sup>

Orientador: Maurício Costa Goldfarb<sup>3</sup>

### Resumo

Esse artigo trata sobre a forma de apresentação do Teorema Fundamental do Cálculo e das Somas de Riemann nos livros textos de Cálculo Diferencial e Integral. Busca-se, a partir da análise de conteúdo, investigar sobre a relação entre a cronologia do surgimento destes conteúdos na história da matemática e a ordem em que são comumente apresentados nos livros textos. Na análise, foram utilizados os primeiros volumes das coleções de Munem & Foulis, Leithold e James Stewart. Observa-se que, diferente do que ocorreu na história da matemática, o conteúdo de Somas de Riemann, utilizado como fundamentação teórica para o Teorema Fundamental, precede este nos livros analisados.

**Palavras-chave:** Ensino de Cálculo; História da Matemática; Somas de Riemann; Teorema Fundamental do Cálculo.

### INTRODUÇÃO

As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) são componentes curriculares de todos os cursos das ciências exatas das universidades brasileiras. Por esse motivo, os problemas associados ao ensino de cálculo, e suas consequências, a desmotivação, repetência, abandono e etc, geram prejuízos vultosos, tanto do ponto de vista pessoal quanto do recurso público investido. Entre as diversas estratégias propostas para minimizar esse problema, tem-se as múltiplas possibilidades de contextualização dos conteúdos, como por exemplo, através do uso da história da matemática e, mais especificamente, da história do CDI.

No entanto, o que se observa de comum no cenário em questão é o inexpressivo uso da história da matemática para o ensino de cálculo, tanto nas aulas quanto nos livros textos utilizados. A lacuna da história no ensino do CDI tem sido objeto de pesquisadores como Rezende (2003), que, buscando investigar dificuldades de natureza epistemológica sobre a

<sup>1</sup> Graduanda do Curso de Matemática, da Universidade de Pernambuco – UPE, [carenbeatriz\\_13@hotmail.com](mailto:carenbeatriz_13@hotmail.com);

<sup>2</sup> Mestranda do curso de pós-graduação em Ensino de Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, [querciacarvalho2012@gmail.com](mailto:querciacarvalho2012@gmail.com);

<sup>3</sup> Professor orientador: Doutor, Universidade Federal da Paraíba, UFP, [mauricio.goldfarb@upe.br](mailto:mauricio.goldfarb@upe.br).

aprendizagem do Cálculo, observa a omissão das ideias básicas e dos problemas construtores no ensino dos conteúdos.

Explicando possíveis motivações de tal ausência, Oliveira e Fragoso (2011), descrevem a história da matemática como algo bastante recente. Como exemplo, segundo estes autores, no I Encontro Paulista de Educação Matemática, realizado no final dos anos 80, ficou constatada a pouca oferta da disciplina História da Matemática nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática das universidades brasileiras.

Inserido nesse contexto, o ensino de cálculo, e por associação, os livros textos utilizados, quando muito, trazem a história da matemática de forma ilustrativa, alheia a lógica do desenvolvimento dos conteúdos.

Nesse contexto, este artigo tem como objetivo analisar a forma de inserção da história nos livros textos de CDI; mais precisamente sobre os conteúdos de Somas de Riemann (SR), desenvolvido pelo matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866), e o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), atribuído ao matemático inglês Isaac Barrow (1630-1677) e ao escocês James Gregory (1638-1675). Busca-se assim, contribuir para observação da necessidade de uma maior utilização da história do CDI no processo de ensino de cálculo, especialmente nos livros textos comumente utilizados nos cursos das ciências exatas e observar a lacuna que falta referente a história da matemática.

## **METODOLOGIA**

Nesse trabalho a investigação se deu a partir da análise da forma de apresentação dos conteúdos SR e TFC nos livros textos de CDI; mais especificamente sobre a relação entre a ordem de apresentação destes conteúdos no texto e a ordem cronológica de suas ocorrências na história da matemática.

Os livros textos escolhidos foram os de cálculo mais tomados de empréstimo, no período letivo 2016.1, na biblioteca da Universidade de Pernambuco/Campus Garanhuns. A partir destes critérios, os textos analisados foram: os primeiros volumes das coleções de Munem & Foulis, Leithold e James Stewart.

Para tanto, utilizamos da análise de conteúdo proposta por Bardin (2009), pensada como um conjunto de técnicas sistematizadas que possibilitam a análise de uma determinada temática. A sistematização metodológica de técnicas, nesse caso, foi fundamentada no

trabalho de Campos (2007), que usa entre outras estratégias a análise de conteúdo para investigação sobre o Teorema Fundamental do Cálculo em livros textos de cálculo, a partir de uma sequência de três etapas que compreendem a pré-análise, a exploração do material, é o tratamento e a interpretação dos resultados obtidos.

A pré-análise compreende a descrição dos elementos de análise, neste caso o TFC e as SR. A descrição do objeto a ser pesquisado serão os livros textos de CDI: Cálculo -Munem & Foulis (vol. 1, 1ª Edição), O Cálculo com Geometria Analítica - Leithold (vol. 1, 3ª Edição) e Cálculo - James Stewart (vol. 1, 2ª Edição).

A exploração do material compreende a execução do trabalho propriamente dito, nesse caso, a leitura dos livros escolhidos e elaboração de um resumo sobre os indicadores para cada livro texto analisado. Buscando um comportamento padrão que confirme ou afaste as hipóteses anteriormente concebidas sobre a forma de apresentação do TFC e SR nos livros textos pesquisados e por fim, a interpretação dos resultados que confirme ou afaste as hipóteses sobre a forma de apresentação do TFC e SR nos livros textos pesquisados.

## DESENVOLVIMENTO

Wrobel, Carneiro e Zeferino (2013), em pesquisa desenvolvida na Universidade Federal do Espírito Santo, no semestre letivo de 2012.1, constatam que, dos 240 alunos matriculados nas disciplinas de Cálculo I, 43% foram não aprovados. Estudos, a exemplo de Mello, Mello e Fernandes (2001), de Rezende (2003), e do próprio Wrobel *et al* (op cit), entre tantos outros, apresentam dados sobre índices de reprovação nos cursos de cálculo em universidades brasileiras variando entre 20% e 95%. Nesse mesmo sentido, Rafael e Escher (2015) observam que o fracasso na disciplina, por vezes, leva ao abandono do curso e até mesmo a influenciar na decisão de não se matricular em qualquer outro curso de graduação que contenha disciplinas de CDI. Para Machado (2008, *apud* Rafael e Escher, 2015, p.3),

algumas das possíveis causas para o desenvolvimento do cenário insatisfatório do ensino-aprendizagem de Cálculo são de natureza cognitiva, isto é, os alunos não apresentam estruturas cognitivas capazes de compreender as complexidades do Cálculo; as causas de natureza didática, segundo esta concepção as dificuldades estariam, em encontrar a metodologia mais adequada ao ensino e, por último, as dificuldades de natureza epistemológica, que baseiam-se na ideia que as deficiências referentes ao ensino de Cálculo são anteriores ao espaço-tempo local do ensino de Cálculo. (Machado, 2008, *apud* Rafael e Escher, 2015, p.3)

Para o bem ou para o mal, inserido fortemente no contexto do ensino de Cálculo, e com consequências epistemológicas e didáticas, encontram-se os livros textos utilizados.

Sobre a importância do livro texto no processo de ensino do CDI, fazendo inclusive referência a outros autores, observa Campos (2007, p.80-81),

Pode-se notar na obra de pesquisadores a importância dada pelos mesmos à análise de texto. Escrevem que os livros didáticos exercem influência no processo de ensino e aprendizagem, e sendo assim, poderiam (ou não) favorecer uma visão mais articulada da matemática, mostrando a dinâmica de sua estrutura e a história dos seus sujeitos e objetos, e que o modo de organização e a qualidade de conteúdos tratados poderiam facilitar o trabalho pedagógico... A base do conhecimento do leitor é muito importante, porém a estrutura do texto pode facilitar ou dificultar sua compreensão, no que concerne ao êxito da leitura. (Campos, 2007, p.80-81)

Rezende (2003), por sua vez, tratando também sobre a questão do ensino de cálculo, observa como fator limitante do aprendizado, a omissão das ideias básicas e dos problemas construtores no ensino dos conteúdos. Esta questão também já foi discutida por Boyer (1959) quando afirma que,

A derivada e a integral tiveram suas origens em dois dos aspectos mais evidentes da natureza – a multiplicidade e a variabilidade, mas foram, no final, definidas como abstrações matemáticas baseadas no conceito fundamental do limite de uma sequência infinita de elementos. Uma vez que tenhamos traçado este desenvolvimento, o poder e a fecundidade destas ideias, quando aplicadas à interpretação da natureza, serão facilmente compreendidos. (BOYER, 1959, p. 3-4, tradução nossa)

Desta forma, além do fato de que certas ideias e problemas sejam omissos, temos muitas vezes a falta de uma contextualização que contribua com a construção dos conceitos envolvidos, problemas estes que podem ser obviamente encontrados, de forma específica, nos livros textos de CDI.

Uma das formas de contextualização que tem sido utilizada de forma inexpressiva ou mesmo negligenciada é a história da matemática. Conforme Zúñiga (1987), mesmo existindo avanços, a exemplo da criação da Sociedade Latino americana da História da Ciência e da Tecnologia em Puebla, México, em 1982, por bastante tempo “o uso da História da Matemática tem sido muito reduzido; mesmo em boa parte do ensino da Matemática moderna não aparece de maneira nenhuma. A formação de professores de Matemática, em geral, tem sido isenta da história da mesma” (Zúñiga, 1987, p. 8, tradução nossa).

Este autor também atenta para o fato de que a concepção de História da Matemática adotada apresentava referências históricas isoladas, como forma de anedotas ou ainda com base apenas em eventos históricos específicos. No entanto, segundo Oliveira (2014), com o estudo da História da Matemática se pode analisar a construção das noções básicas dos

conceitos matemáticos, com isso o aluno revive suas descobertas e aumenta a sua compreensão do conteúdo sem a necessidade de memorização de suas definições.

Esse trabalho, buscando investigar sobre a relação entre a contextualização histórica e a forma de abordagem dos conteúdos nos livros textos de cálculo, trata especificamente do Teorema Fundamental do Cálculo e das Somas de Riemann.

O TFC relaciona os dois principais conteúdos do CDI, aparentemente distintos, a derivada, relacionada aos conceitos de coeficiente angular da reta tangente a função no ponto considerado, ou taxa de variação, ao de integral, representada pela área sob o gráfico de uma função. Conforme Santos (2011), embora tenha sido apresentado de forma sistematizada por Newton e Leibniz, o TFC já havia sido abordado por outros dois matemáticos alguns anos antes da “invenção” do cálculo: o inglês Isaac Barrow (1630 - 1677) e o escocês James Gregory (1638 – 1675).

Isaac Barrow desenvolveu uma abordagem do cálculo diferencial muito próxima da que conhecemos atualmente. Na concepção de Eves (2004), Barrow foi o primeiro a perceber de maneira plena que a diferenciação e a integração são operações inversas, tais constatações aparecem provadas em suas obras *Lectiones*. Ou seja, Barrow, que foi professor de Newton, apesar de não ter formalizado, é pioneiro nas constatações das ideais centrais do TFC.

Segundo Souza e Mariani (2005), durante o desenvolvimento de pesquisas com séries de funções relacionadas a processos infinitos, em 1667, James Gregory apresenta a primeira definição explícita de função. Em 1668, Gregory publica uma das suas mais importantes obras, *Geometriae pars universalis*, contendo a primeira demonstração de que a diferenciação é um processo inverso à integração. Segundo Boyer (2010), se Gregory tivesse desenvolvido sua obra por meios analíticos provavelmente teria antecipado a “invenção” do cálculo, uma vez que já conhecia as bases dessa ciência.

As Somas de Riemann, metodologia para cálculo de uma área delimitada por uma função utilizando o conceito de limite, foi proposta inicialmente pelo alemão Bernhard Riemann (1826-1866). Importante observar que o objetivo de Riemann, já em meados do século XIX, não era o cálculo de uma área, conhecimento já bastante desenvolvido na Grécia antiga, mas sim, a formalização do cálculo integral, atribuindo-lhe o status da matemática moderna. Conforme Lima (2012, p. 10), “em 1854, o matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866) realizou um estudo bem mais aprofundado sobre a integral e formulou a

definição atual, nos padrões da Análise Moderna, tornando-a um instrumento poderoso na resolução de inúmeros problemas”.

Em resumo, especificamente sobre a cronologia, tem-se o Teorema Fundamental do Cálculo (1668) precedendo, em aproximadamente dois séculos de história, o surgimento das Somas de Riemann.. Entre os séculos XVII e XIX, o iluminismo e a consequente revolução científica, a Revolução Francesa e suas consequências sociais na Europa ocidental, o desenvolvimento do capitalismo; na história mudanças gigantescas, nos livros de cálculo, algumas páginas separam os conteúdos.

## **RESULTADOS E DISCUSSÃO**

Na fase de pré-análise, a formulação de hipóteses, foi que os conteúdos de TCF e SR são apresentados nos livros textos em ordem contrária à sua ocorrência na história da matemática, sem que isso seja de alguma forma dita ao leitor.

### *Munem & Foulis*

De forma rigorosa, os autores apresentam o TFC no item 6.4, na página 322. No entanto, antes disso, no final do capítulo 5, em 5.6, na página 287, no item “área sob o gráfico de uma função” o texto traz o que denomina de versão preliminar do TFC. Após a apresentação da versão preliminar, o autor observa: “Não podemos dar uma prova rigorosa desse teorema aqui – isso porque não possuímos (ainda) uma definição rigorosa de área”. A definição rigorosa de área ocorre no texto exatamente no item 6.2, página 303, com a apresentação do conteúdo referente a SR. Finalmente, de posse da definição rigorosa de área, advinda das SR, o texto apresenta formalmente, na página 322, o TFC.

Dessa forma, o texto utiliza as SR como fundamentação teórica indispensável para formalização do TFC. Obviamente, para tanto, as SR precedem, na ordem de apresentação dos conteúdos no texto, o TFC.

No que se refere a contextualização sobre a história da matemática, na página 304, quando trata especificamente da notação para a Partição de Riemann, temos no texto: “Esta terminologia é usada em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann, que, durante o século XIX, realizou alguns dos primeiros trabalhos definitivos sobre o problema de

apresentar uma formalização matemática precisa da Integral de Newton e Leibniz” (Foulis e Munem, 1982, p.327).

Apesar de, entre a apresentação dos dois conteúdos, ser esse o único trecho dedicado a contextualização histórica, o autor observa, mesmo que de forma sucinta, o objetivo dos estudos de Riemann sobre a formalização do CDI, e não simplesmente para o cálculo de área.

O texto não faz referência à história da matemática especificamente sobre o TFC, no entanto, a importância do teorema para o CDI, é evidenciada pelo autor no trecho da página 327: “O teorema fundamental do cálculo estabelece uma profunda relação entre diferenciação e integração e nos permite converter fatos sobre diferenciação em fatos sobre integração” (Foulis e Munem, 1982, p.327).

### *Leithold*

Na página 286 no item 5.1 “Antidiferenciação” o autor discute o conceito de operações inversas e posteriormente apresenta a definição de antiderivada: “Uma função  $F$  será chamada de antiderivada de uma função  $f$  no intervalo  $I$  se  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  em  $I$ ”. Em seguida são apresentados dois teoremas que podem ser compreendidos como “versões preliminares do Teorema Fundamental do Cálculo”. Na seção 5.4, “Área”, o autor aborda o conceito de área inserindo as Somas de Riemann. Posteriormente, na seção 5.5, “A integral definida”, de posse do conceito de SR, apresenta-se uma definição rigorosa da integral definida. Somente na seção 5.8, “Os teoremas fundamentais do cálculo”, o TFC é apresentado formalmente.

Observa-se que a apresentação formal do TFC é feita após toda uma discussão teórica dos conceitos de integral definida e conseqüentemente das SR.

No texto, alguns pequenos trechos de referência à história da matemática. Na página 288: “Leibniz introduziu a convenção de escrever a diferencial de uma função após o símbolo de antidiferenciação.”. Na página 324: “Tal soma é denominada Soma de Riemann, assim chamada pelo matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866).”. Na página 344:

Historicamente, os conceitos básicos da integral definida foram usados pelos antigos gregos, principalmente Arquimedes (287 – 212 A.C), há mais de 2000 anos, muito antes da formulação do cálculo diferencial. No século dezessete, quase simultaneamente, mas trabalhando independentemente, Newton e Leibniz mostraram como o Cálculo poderia ser usado para se encontrar a área de uma região

limitada por uma curva ou um conjunto de curvas, determinando a integral definida por antidiferenciação (Leithold, 1994, p. 344).

*Stewart*

Na abertura do capítulo 5, “Integrais”, na página 334, o autor faz referência ao TFC evidenciando sua relevância para o CDI: “Há uma conexão entre o cálculo integral e o diferencial. O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada e veremos, neste capítulo, que isso simplifica bastante a solução de muitos problemas”.

Na seção 5.1 “Áreas e distâncias”, página 335, é abordado o conceito de área, através das Somas de Riemann. Na seção seguinte 5.2 “A integral Definida”, página 345, a integral definida é conceituada de maneira rigorosa. Na página 345 encontra-se um trecho da história da matemática, sob a forma de comentário situado na lateral da página, que descreve o papel e a importância de Riemann para o CDI,

Bernhard Riemann fez seu doutorado sob a orientação do legendário Gauss na Universidade de Göttingen e lá permaneceu para lecionar. Gauss que não tinha o hábito de elogiar outros matemáticos, referiu-se a Riemann como “uma mente criativa, ativa e verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil”. [...] Ele também fez grandes contribuições para a teoria de funções de variáveis complexas, física-matemática, teoria dos números e fundamentos da geometria. Os conceitos mais amplos de espaço e geometria de Riemann favoreceriam, 50 anos mais tarde, o desenvolvimento da teoria geral da relatividade de Einstein. Riemann, que nunca teve boa saúde, morreu de tuberculose aos 39 anos (Stewart, 2010, p. 345).

O TFC é inserido somente na seção 5.3, “O Teorema Fundamental do Cálculo”, na página 359. Na abertura da seção o autor descreve a relevância do TFC fazendo um paralelo à história do mesmo,

O nome Teorema Fundamental do Cálculo é apropriado, pois ele estabelece uma conexão entre dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630 – 1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados. Ele percebeu que a derivação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente [...] (Stewart, 2010, p. 359).

Nos três livros analisados, a formalização do Teorema Fundamental do Cálculo faz-se a partir do conceito do cálculo de área proposto nas Somas de Riemann. Dessa forma, o leitor deve compreender as Somas de Riemann para, posteriormente, abordar o Teorema fundamental do Cálculo. A justificativa, respaldada na matemática pós-iluminista de Bernhard

Riemann, próxima da vivenciada hoje nas salas de aula e nos livros textos, no qual a existência pressupõe a formalização lógica dos fatos, não impede um possível equívoco histórico por parte do leitor.

Equívoco que ocorre quando, nas salas de aula, orientado pelos livros textos, o professor apresenta o cálculo de área pelo exaustivo processo das Somas de Riemann e, posteriormente refaz o processo por cálculo integral; isso sem que de forma clara seja explicado os processos históricos associados.

Segundo Barufi (1999), o livro didático escolhido pelo professor traz indícios de como a disciplina será ministrada. Os tradicionais livros de cálculo são organizados de uma maneira linear seguindo a ordem limite, derivada e integral, uma vez que, se acredita que essa é a ordem em que se aprende; todavia tais livros fazem uma abordagem mecânica dos conteúdos sem significá-los. Para Baldino (1998) não há no livro texto elementos que façam sentido ao que ali se expõe.

Essa abordagem “linearizada” do ensino do cálculo vai contra a própria natureza do conhecimento matemático, uma vez que, de acordo com Lima e Sauer (2003), tal conhecimento possui uma lógica própria que exige a formalização dos conceitos construídos em cada etapa, adequada a cada nível de desenvolvimento. Dessa maneira, é insuficiente a apresentação dos conceitos mediante um conjunto de regras de cálculo, tendo em vista que mais importante que aplicar uma fórmula em determinado problema é compreender os significados de tal aplicação.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O surgimento do Cálculo Diferencial e Integral não ocorreu na ordem sequencial de tempo na qual são abordados os tópicos nos atuais livros da área; tais textos são organizados de maneira a atender aos critérios lógicos da demonstração dos conteúdos. O fato de o leitor necessitar de um conteúdo desenvolvido no século XIX, as Somas de Riemann, para demonstrar outro do século XVII, o Teorema fundamental do Cálculo, é um bom exemplo desse problema. Nesse caso, as Somas de Riemann são utilizadas para apresentar ao aluno o Cálculo Integral, antes do Teorema Fundamental do Cálculo.

Oliveira e Fragoso (2011), ao contextualizarem o ensino da história da matemática no Brasil, indicam que seu surgimento, enquanto disciplina formal ocorre posteriormente ao

lançamento das principais edições dos livros textos clássicos do cálculo integral, ainda utilizados. Assim, também é justificada a ausência na explicação da história da matemática observada nos livros atuais.

Acredita-se que, a história da matemática, enquanto disciplina isolada, não tem conseguido mudar essa realidade. Nesse sentido, para minimizar esse problema, talvez fosse o caso de se repensar sobre o *locus* e a importância da história da matemática nos cursos de formação de professores de Cálculo.

## REFERÊNCIAS

- Baldino, R. R. (1998). *Desenvolvimento de Essências de Cálculo Infinitesimal*. Rio de Janeiro: MEM/USU.
- Bardin, L. (2009). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: LDA.
- Barros, R. M. & MELONI, L. G. P. (2006). O Processo de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral por meio de Metáforas e Recursos Multimídia. *Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, 34.
- Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. São Paulo: Faculdade de Educação - USP.
- Batista, R. J. (2009). Uma Breve Introdução à História do Cálculo Diferencial e Integral. *Revista científica do colégio militar de Curitiba*, (1), 41-56.
- Boyer, C. B. (2010). *História da matemática*. São Paulo: Blucher.
- Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover publications, INC.
- Campos, R. P. (2007). *A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica*. Dissertação de Mestrado em educação matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Cavasotto, M.; Portanova, R. (2008). *Reflexões sobre as dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral*. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/online/III Mostra/EducacaoemCienciaeMatematica/62352%20-%20MARCELO%20CAVASOTTO.pdf>.

- Escher, M. A.; RAFAEL, R. C. (2015). Evasão, baixo rendimento e reprovações em cálculo diferencial e integral: uma questão a ser discutida. *Encontro Mineiro de Educação Matemática*, 7.
- Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp.
- Foulis, D. J. & Munem, M. A. (1982). *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora.
- Fragoso, W. C. & Oliveira, M. C. A. (2011). História da Matemática: história de uma disciplina. *Rev. Diálogo Educ.*, Curitiba, 11(34), 625-643.
- Garzella, F. A. C. (2013). *A Disciplina de Cálculo I: Análise das Relações Entre as Práticas Pedagógicas do Professor e seus Impactos nos Alunos*. Tese de Doutorado em Educação, Conhecimento, Linguagem e arte. Campinas: Faculdade de Educação - Universidade Estadual de Campinas.
- Leal Júnior, L. C. (2004). *Integral de Riemann no  $R^n$* . Trabalho de Conclusão de Curso. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina.
- Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Editora Harbra.
- Lima, I. G. & Sauer, L. Z. (2003). Uma proposta metodológica e sua contribuição para a aprendizagem de Matemática na formação de Engenheiros. *Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, 30.
- Lima, L. J. G. (2012). *Da Integral de Riemann para a Integral de Lebesgue*. Trabalho de Conclusão de Curso. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais.
- Mariani, V. C. & Souza, V. D. (2005). Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função. *EDUCERE*, 5.
- Melchior, A. & Soares, M. (2003). *História do cálculo diferencial e integral*. Disponível em: [https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD\\_EaD/article/.../233](https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/.../233).
- Mello, J. C. C. B. S.; Mello, M. H. C. S. & Fernandes, A. J. S. (2001). *Mudanças no ensino de Cálculo I: Histórico e Perspectivas*. Disponível em: <http://www.uff.br/decisao/cobenge02.pdf>.
- Raad, M. R. (2012). *História do ensino de cálculo diferencial e integral: a existência de uma cultura*. Dissertação de Mestrado profissional em Educação Matemática. Juiz de Fora:

Universidade Federal de Juiz de Fora.

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese de Doutorado. São Paulo: Faculdade de Educação – USP.

Santos, W. C. (2011). *As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do cálculo de Arquimedes a Newton e Leibniz*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Stewart, J. (2010). *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning.

Wrobel, J. S.; Carneiro, T. C. J. & Zeferino, M. V. C. (2013a). Ensino de cálculo diferencial e integral na última década do Enem: uma análise usando o Alceste. *Encontro Nacional De Educação Matemática*, 11.

Wrobel, J. S.; Carneiro, T. C. J. & Zeferino, M. V. C. (2013b). Cálculo diferencial e integral no Enem: um mapa da produção científica na última década. *Encontro Nacional De Educação Matemática*, 11.

Wrobel, J. S.; Carneiro, T. C. J. & Zeferino, M. V. C. (2013c). *Um mapa do ensino de cálculo nos últimos 10 anos do COBENGE*. Disponível em <[http://www.fadep.br/engenharia-eletrica/congresso/pdf/117437\\_1.pdf](http://www.fadep.br/engenharia-eletrica/congresso/pdf/117437_1.pdf)>.

Zúñiga, A. R. (1987). Algunas implicaciones de la filosofía y la historia de las matemáticas em su enseñanza. *Educanion*, 11.

SIPLE, Ivanete Zuchi; CARDOSO, Dienifer Tainara; FIGUEIREDO, Elisandra Bar. As somas de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo: como conectá-los?. In: 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Ilhéus. Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015. v.4. p. 2555-2565.

OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Francieli Aparecida – A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM. Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, 2014. Bagé/RS, Brasil.. 2014.