

## O ENSINO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Matheus Marques de Araújo<sup>1</sup>

Universidade Estadual da Paraíba- [marquesmatheusaraujo@gmail.com](mailto:marquesmatheusaraujo@gmail.com)

Denis Matias do Nascimento<sup>2</sup>

Universidade Estadual da Paraíba- [denis.matias.denis@gmail.com](mailto:denis.matias.denis@gmail.com)

### RESUMO

O presente artigo tem por objetivo analisar como a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas potencializa a aprendizagem do conteúdo de máximos e mínimos. A pesquisa de enfoque qualitativo se apoiou na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas propostas por Onuchic e Allevato (2011) e foi realizada em uma Universidade pública do sertão paraibano com os alunos do 3º período matriculados na turma de Cálculo Diferencial e Integral II. Esse estudo pôde revelar que o uso da referida metodologia na aula de máximos e mínimos foi de suma importância, uma vez que ao tratar os alunos como personagens principais no processo de ensino-aprendizagem propiciou que novos conceitos fossem construídos a partir de conhecimentos prévios.

**Palavras-chave:** Resolução de problemas, Cálculo diferencial e integral, Ensino, Aprendizagem.

### INTRODUÇÃO

No Brasil, a aprendizagem de matemática se configura como um grande desafio em todos os níveis de ensino. Os últimos resultados fornecidos pelo Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), aplicado em 70 países no ano de 2015, revelaram que o Brasil amarga uma péssima posição no ranking referente à aprendizagem em matemática, indicando que os estudantes brasileiros estão bem abaixo do nível básico de pró-eficiência na área.

A partir destes dados foi possível evidenciar lacunas no processo de ensino-aprendizagem de matemática, sobretudo no ensino médio, onde uma boa parte dos alunos não dominam conceitos da matemática básica vistos no ensino fundamental.

Desta forma, se considerarmos o ingresso desses alunos no ensino superior em cursos da área das ciências exatas, em específico nas licenciaturas, podemos supor que a sua

---

<sup>1</sup>Mestrando em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEPB-PB, [marquesmatheusaraujo@gmail.com](mailto:marquesmatheusaraujo@gmail.com);

<sup>2</sup> Mestrando em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEPB-PB, [denis.matias.denis@gmail.com](mailto:denis.matias.denis@gmail.com);

formação ficará comprometida, uma vez que terá sérias dificuldades em aprender conteúdos que dependem de conhecimentos prévios. Segundo Cunha (2006, p. 527),

[...] docentes universitários costuma-se esperar um conhecimento do campo científico de sua área, alicerçado nos rigores da ciência e um exercício profissional que legitime esse saber no espaço da prática. Contando com a maturidade dos alunos do ensino superior para responder às exigências da aprendizagem nesse nível e, tendo como pressuposto o paradigma tradicional de transmissão do conhecimento, não se registra, historicamente, uma preocupação significativa com os conhecimentos pedagógicos.

Assim, por na maioria das vezes estarem inseridos em um universo de concepções tradicionalistas de ensino e carente de metodologias, boa parte dos discentes não conseguem superar os obstáculos que surgem no processo de aprendizagem, sendo esse um dos fatores que resulta nos altos índices de reprovação e evasão.

Neste sentido, é importante salientarmos acerca do ensino-aprendizagem de cálculo diferencial integral, já que se trata de uma disciplina que estatisticamente se enquadra nessas características. Geralmente ofertada no início dos cursos de ciências exatas, a disciplina é tida como o terror dos universitários e seu insucesso provém justamente da ausência de domínio dos conhecimentos prévios.

Desse modo, preocupados com a defasagem no ensino-aprendizagem de cálculo e os desafios existentes para com a educação matemática no ensino superior, tivemos com a presente pesquisa o objetivo de analisarmos de que forma a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas poderia potencializar a aprendizagem do cálculo diferencial e integral, em especial os conceitos de máximos e mínimos.

Aplicamos nossa pesquisa em uma turma do 3º período de uma universidade pública do sertão paraibano. A turma de 45 alunos era composta por graduandos que faziam licenciatura em matemática e química. A pesquisa revelou que o uso da referida metodologia na aula de máximos e mínimos foi de suma importância, uma vez que tratou os alunos como personagens principais no processo de ensino-aprendizagem, fazendo com que construíssem novos conceitos e revisitassem antigos a partir de seus conhecimentos prévios.

## **METODOLOGIA**

A pesquisa tem um enfoque qualitativo e se apoiou na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas propostas por Onuchic e Allevato (2011). Essa metodologia se trata de um processo de trabalho Pós-Polya, onde o termo avaliação é acrescido formando a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação dentro de uma dinâmica de trabalhos nas aulas de matemática. Segundo Onuchic e Allevato (2011, p.81),

Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

A partir desta metodologia, Onuchic e Allevato (2011), propoem que a organização das atividades durante a Resolução de Problemas se sigam de acordo com as etapas descritas a seguir:

- **Preparação do Problema:** O professor seleciona um problema, que ainda não tenha sido trabalhado em sala de aula, para prover a construção de um novo conceito. Esse problema é chamado de problema gerador.
- **Leitura individual:** O professor entrega aos alunos uma cópia do problema e solicita que seja realizada uma leitura individual.
- **Leitura em conjunto:** Nesta etapa o professor solicita à turma que se organizem em grupos e pede que uma nova leitura, agora em conjunto, seja realizada. Neste momento, se julgar necessário o professor poderá auxiliar os alunos na leitura do problema.
- **Resolução do Problema:** Agora sem dúvidas e realizando um trabalho cooperativo e colaborativo, os alunos podem buscar resolvê-lo.
- **Observar e Incentivar:** Nesta etapa, agora como mediador, o professor irá observar analisar e estimular o trabalho cooperativo dos alunos, dando-lhes tempo e estimulando a troca de ideias. O professor encoraja seus alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e acompanha-os na resolução de problemas secundários que podem surgir: dificuldades em técnicas operatórias, notação, passagem da linguagem verbal para a linguagem matemática e etc.
- **Registro das resoluções na lousa:** Representantes de cada um dos grupos são convidados a irem a lousa registrar suas soluções. Todas as soluções devem ser apresentadas, independentes de estarem corretas ou não.

- **Plenária:** Este momento é bastante rico para aprendizagem dos alunos. Todos os alunos são convidados a discutirem as soluções registradas na lousa, defendendo seus pontos de vistas e esclarecendo as dúvidas. O professor atua como guia e mediador das discussões.
- **Busca de consenso:** Após discussão e esclarecimento das dúvidas, o professor junto a sua turma tenta chegar a um consenso sobre o resultado correto.
- **Formalização:** Depois da realização de todas as etapas, o professor apresenta uma solução formal para o problema, organizada e estruturada em linguagem matemática, procurando padronizar os conceitos e os procedimentos utilizados durante a resolução de problemas, destacando propriedades e demonstrações.

A avaliação integra esse processo realizando-se para ambos.

## DESENVOLVIMENTO

Os problemas sempre ocuparam um espaço significativo nos currículos de matemática escolar. Apesar de terem uma visão bastante limitada a respeito do ensino de matemática e a Resolução de Problemas, desde a antiguidade, chineses, egípcios e gregos contribuíram para a construção de importantes conceitos matemáticos a partir da necessidade de resolverem problemas.

Para Onuchic e Allevato (2011, p.81), “um problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”, não podendo ser a matemática entendida como ferramenta para resolver problemas, ou seja, os problemas não se configuram como um caso isolado, mas sim como ponto de partida, como um meio de se ensinar matemática.

Lorenzato (2010, p.3) afirma que “dar aulas é diferente de ensinar. Ensinar é dar condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento”. Em sala, o professor tem uma importante função durante sua prática pedagógica, a de conduzir o aluno a um ambiente de aprendizagem, do qual ele possa perceber aplicações e contribuições.

Nesta vertente, se faz necessário que o professor planeje e construa sua aula com o objetivo de incentivar seus alunos a fazer matemática, buscando investir em metodologias que passem a tratar os alunos como sujeitos ativos e venham a favorecer a quebra de obstáculos e aquisição de novos conhecimentos.

Para Vila (2006) “os problemas são um meio para pôr o foco nos alunos, em seus processos de pensamento e nos métodos inquisitivos”, sendo papel do professor encontrar maneiras de aproveitar e explorar, através de situações problemas concretas essa capacidade e

curiosidade do aluno de buscar soluções. Durante esse processo é comum que os alunos façam alguns questionamentos pertinentes que devem ser observados e esclarecidos com devida atenção pelo professor. Esses porquês são naturais e importantíssimos para ampliação da compreensão e construção de sentidos durante resolução de problemas, uma vez que,

Na prática pedagógica, a presença do porquê indica que a situação de aprendizagem está ganhando sentido, que o processo de compreensão está em movimento e não só para aquele que pergunta, uma vez que ela provavelmente influi sobre os outros colegas. Ao professor atento, as perguntas revelam os pontos de dificuldades de aprendizagem, indicando o que necessita de revisão ou de modificação de estratégia de ensino. (LORENZATO, 2010; P.97)

No ensino superior o uso de resolução de problemas como metodologia de ensino ainda é recente, no entanto, quando utilizada, cumpre bem seu papel, provendo situações que levam a construção do conhecimento durante a busca por estratégias para a resolução do problema, Ferreira et al (2017; p.215) ressalta que “Nessa ação, os pesquisadores proporcionaram condições para a introdução de novos conceitos como: Derivada; Integral; Equações diferenciais; Matemática aplicada à administração e outros.”

Logo, podemos dizer que o ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas revela-se como a metodologia capaz de propiciar um ensino com compreensão, visto que coloca o aluno como personagem principal no processo de ensino-aprendizagem, o envolvendo na resolução e discussão de tarefas, desenvolvendo criatividade, autonomia e criticidade ,ao mesmo tempo em que revisita conceitos já vistos.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nossa pesquisa teve como norte a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas. Assim, os resultados descritos a seguir serão apresentados de acordo com as etapas descritas pela metodologia utilizada.

Escolhemos a aula de introdução do conteúdo de Máximos e Mínimos para aplicarmos a nossa pesquisa. Dessa forma o problema gerador utilizado para construção do conceito foi o seguinte:

O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 de abril de 1990 pelo ônibus espacial Discovery. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento  $t=0$  até a ejeção do foguete auxiliar em  $t=126$  s, é dado por:

$$A(t) = 0,0011904t^2 - 0,05504t + 7,196$$

(em metros/segundo). Usando este modelo, estime os valores de máximo e mínimo absolutos da aceleração do ônibus entre o lançamento e a ejeção do foguete auxiliar. (Problema adaptado. Retirado do livro cálculo-volume I/ James Stewart).

Nesta primeira etapa é importante que o problema selecionado nunca tenha sido trabalhado em sala de aula pelo professor e que ele esteja de acordo com a realidade de sua turma no que se refere aos conhecimentos prévios que os discentes tenham.

Após apresentação do problema pedimos aos alunos que fizessem uma leitura silenciosa e individual do problema. Em seguida dividimos a turma em grupos e solicitamos uma nova leitura. Uma breve discussão foi realizada com o intuito de sanar as dúvidas existentes quanto à interpretação do problema, para que assim fosse possível iniciarmos a etapa de resolução.

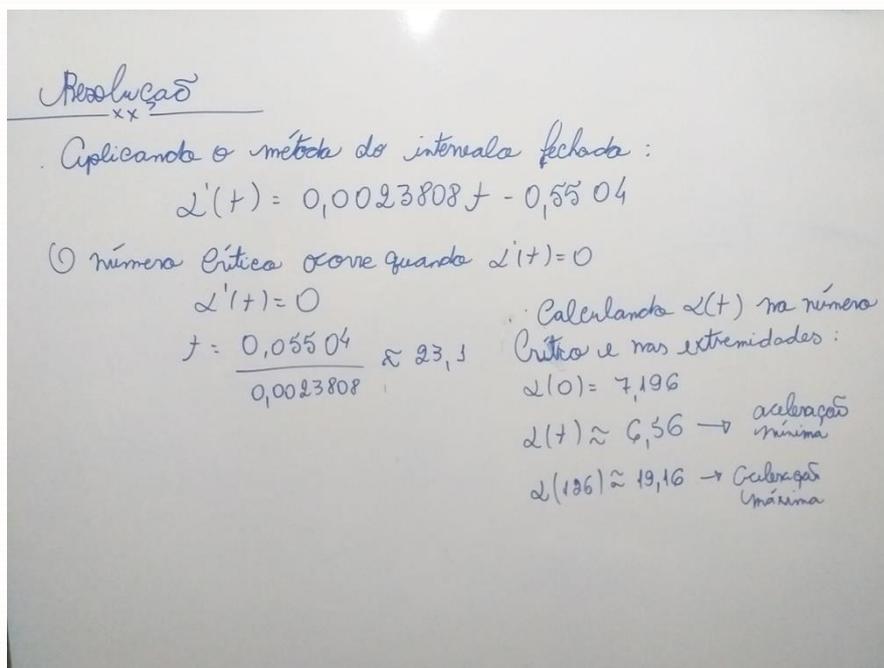
Na etapa de observação exercemos o papel de mediadores, observando quais estratégias cada grupo estava adotando para resolver o problema. Durante nossa observação percebemos que boa parte dos alunos reconhecia a função como sendo uma função quadrática e ao levantarmos um questionamento acerca da resolução, boa parte revelou estar buscando as coordenadas do vértice e ponto máximo e mínimo.

Foi possível perceber que umas das principais dificuldades apresentadas pelos alunos estavam ligadas a operações com decimais e o fato não se lembrarem, qual fórmula poderiam utilizar para encontrar as coordenadas do vértice.

Depois de concluírem a etapa da resolução, solicitamos que um representante de cada grupo se voluntariasse a ir até a lousa registrar a sua resolução. Inicialmente alguns alunos se recusaram a participar desta etapa por duvidar de sua solução. Neste momento julgamos importante iniciar um diálogo acerca da importância do erro no processo de ensino-aprendizagem, ressaltando que a sala de aula é um ambiente riquíssimo e que a aprendizagem só se efetivaria se todos construíssem o novo conhecimento juntos.

Deste modo, após o registro das soluções na lousa, iniciamos a etapa da plenária e começamos a discussão. Este momento foi de suma importância, já que todos os alunos participaram e defenderam seus pontos de vistas. Ao buscarmos um consenso, os discentes puderam perceber que seus principais erros estavam ligados ao uso incorreto da calculadora científica, o cálculo com números decimais e o uso incorreto das fórmulas de resolução.

A última etapa consistiu na formalização dos conceitos. A partir do processo e da resolução do problema a partir dos conhecimentos prévios, apresentamos as definições de máximo e mínimo local, o teorema de Fermat, a definição de número crítico e o método do intervalo fechado, de modo que ao fim resolvemos novamente o problema utilizando os novos conceitos apresentados.



Resolução  
x x

Aplicando o método do intervalo fechado:

$$L'(t) = 0,0023808t - 0,5504$$

O número crítico ocorre quando  $L'(t) = 0$

$$L'(t) = 0$$

$$t = \frac{0,5504}{0,0023808} \approx 23,1$$

Calculando  $L(t)$  no número crítico e nas extremidades:

$$L(0) = 7,196$$

$$L(t) \approx 6,56 \rightarrow \text{aceleração mínima}$$

$$L(136) \approx 19,16 \rightarrow \text{aceleração máxima}$$

Fonte: Os Autores

O processo de avaliação ocorreu durante todas as etapas, já que os pesquisadores enquanto regentes da sala de aula puderam perceber quais as dificuldades apresentadas pelos alunos, de modo que a partir delas pudessem redirecionar a sua prática docente. Ao mesmo tempo a metodologia foi capaz de possibilitar ao aluno a oportunidade de aprender novos conceitos e revisar os antigos, além de perceber quais os seus principais erros.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sala de aula de matemática é um ambiente riquíssimo envolto de diversos fenômenos relativos aos processos de ensino-aprendizagem. Não existe um roteiro pronto para a realização de atividades em sala de aula, no entanto o ensino de matemática através da Resolução de Problemas se configura como uma importante alternativa para um ensino de matemática mais produtivo com foco nos alunos.

Em nossa pesquisa foi possível perceber que quando usamos a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas, o professor e o aluno assumem novos papéis em sala de aula, de modo que atuando como mediador o professor tem a função

(83) 3322.3222

contato@conapesc.com.br

www.conapesc.com.br

de avaliar os processos de construção da solução do problema e o aluno como personagem principal analisa seus métodos e busca criar estratégias para solucionar o problema, revisando conceitos antigos e aprendendo novos.

Neste processo a avaliação deixa de levar em conta só as soluções, passando a considerar todas as estratégias e caminhos que os alunos escolheram para chegar a um consenso.

Os alunos trazem para a sala de aula conceitos e ideias preexistentes em seu cognitivo, construídas através de experiências ao longo de sua vivência em sociedade. Portanto o professor tornando o ambiente da sala de aula em um lugar onde o aluno esteja propenso a pensar os problemas estará contribuindo para uma aprendizagem significativa.

## REFERÊNCIAS

Cunha, Maria Isabel Da. Diferentes olhares sobre as práticas pedagógicas no ensino superior: a docência e sua formação. **Educação**, v. 27, n. 3, 2006.

De La Rosa Onuchic, Lourdes; Gomes Allevalo, Norma Suely. **Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas**. Boletim de Educação Matemática, vol.25, núm.41, diciembre, 2011, pp. 73-98. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

Ferreira, Nilton César; Silva, Lilian Esquinelato; Martins, Egídio Rodrigues. Resolução de Problemas no Ensino Superior. In: Onuchic, Lourdes de la Rosa; Junior, Luiz Carlos Leal; Pironel, Márcio (Orgs.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

Lorenzato, Sergio. **Para aprender matemática**/ Sergio Lorenzato. 3. Ed. rev.- Campinas, SP: Autores associados, 2010. (Coleção Formação de Professores)

Moreno, Ana Carolina. **Brasil cai em ranking mundial de educação em ciências, leitura e matemática**. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml>. Acesso em 09 jul. de 2019.

Stewart, James. **Cálculo, volume I**/ James Stewart. 7. Ed.- São Paulo: Cengage Learning, 2013. Tradução EZ2 Translate.

Vila, Antoni. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas**/ Antoni Vila, María Luz Calejjo; tradução Ernani Rosa- Porto Alegre: Artmed, 2006.