RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Juscelino de Araújo Silva[1]
Silvanio de Andrade[2]

RESUMO

Este trabalho evidencia as potencialidades da resolução de problemas, aliada ao uso das representações múltiplas, no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas. Para tanto, a partir de um levantamento bibliográfico a respeito de pesquisas sobre o ensino de Álgebra, mais especificamente, no que se refere ao ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas, na matemática do Ensino Fundamental, decidiu-se trabalhar com o uso da resolução de problemas aliada às ideias sobre representações múltiplas, conforme Goldin e Shteingold (2001) e Friedlander e Tabach (2001). Para alcançar o objetivo proposto, a pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada numa escola da rede municipal da cidade de Mari, estado da Paraíba, numa turma de 8º ano, utilizando-se da metodologia da Resolução de Problemas, baseada, especialmente, nas contribuições de Andrade e Onuchic (2017). Ao término de toda experiência, e com os dados coletados através de um diário de campo e dos registros feitos pelos alunos, observou-se que os momentos das plenárias, consensos e formalização de conteúdo da metodologia da Resolução de Problemas se demonstraram muito importantes para o aprendizado dos alunos; também foi constatado a contribuição e a necessidade de ouvir os mesmos quando expõem oralmente suas representações verbais a respeito do que entenderam, a fim de compreender melhor os seus registros escritos tanto numérica, como algébrica ou graficamente e então perceber se conseguiram assimilar as ideias que foram ensinadas.

Palavras-chave: Sistema de equações polinomiais do primeiro grau, Representações múltiplas, Resolução de Problemas, Ensino de Álgebra.

INTRODUÇÃO

"Dois números somados dão 25 e a diferença entre eles é 5. Quais são estes números?" Movidos por problemas como este no qual um sistema de equações polinomiais do 1º grau pode ser usado para resolvê-lo, mas lembrando de nossa experiência tanto enquanto aluno, como enquanto professor constatando a dificuldade que os alunos apresentam em fazer a transição entre a linguagem materna para a algébrica em enunciados como este foi o que nos levou a pesquisar e então buscar meios para melhorar o aprendizados dos alunos neste quesito. Partindo deste ponto buscamos evidenciar as potencialidades da resolução de problemas, aliada ao uso

[1] Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - PB, juscelinoaspf@hotmail.com;
[2] Professor orientador: Doutor, Universidade Estadual da Paraíba - PB, silvanio@usp.br.

das representações múltiplas, no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.

Para tanto a pesquisa foi desenvolvida em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Mari-PB, onde o professor foi o próprio pesquisador. Para obter os dados que foram analisados adotou-se um diário de campo, no qual o pesquisador buscou, na medida do possível, descrever cada momento da pesquisa para posterior análise. Juntamente com o diário, também foram analisados os registros feitos pelos alunos ao término de cada etapa da pesquisa. Ao lançar mão de tais instrumentos, tínhamos o objetivo de conseguir um material que nos ajudasse a entender e explicar melhor os resultados obtidos. Por tudo isso, consideramos que nossa pesquisa se encaixa numa perspectiva qualitativa, conforme Bogdan e Biklen (1994) e Gil (2010), na modalidade de pesquisa pedagógica. Na pesquisa qualitativa é o próprio professor que pesquisa sua sala de aula na busca de observar a metodologia que está utilizando e tentando encontrar meios de aprimorá-la, a fim de proporcionar um melhor aprendizado aos alunos (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008).

Ao término do trabalho percebemos como alguns momentos da metodologia da Resolução de Problemas foram muito importantes para o aprendizado dos alunos como os consensos, plenárias e formalização do conteúdo; além de percebermos a necessidade de ouvir os alunos e assim entender a representação interna que tiveram a qual justificou a representação externa que escreveram; por outro lado, vemos também que o ensino dos métodos algébricos da adição e substituição precisam de mais tempo para serem melhor aprendidos, como também o trabalho com as representações gráficas dos sistemas no plano cartesiano.

METODOLOGIA

Optamos por realizar uma pesquisa qualittiva na modalidade de pesquisa pedagógica, na qual o próprio pesquisador é o professor de matemática da turma e portanto ele mesmo observa sua sala buscando formas de melhor ensinar. (LANKSHEAR; KNOBLE, 2008).

A pesquisa foi fetia em uma turma de 8º ano, do município de Mari-PB. As aulas ocorriam no turno da manhã da seguinte forma: na quarta-feira eram as duas primeiras aulas (das 07h00 às 08h20) com uma terceira aula (das 09h55 às 10h30) e na quinta-feira eram as duas últimas aulas (das 09h55 às 11h00). No decorrer da pesquisa, constatamos que quando as aulas eram na quinta-feira, por serem as últimas, ocorria uma maior dispersão dos alunos, o que não ocorria na quarta (em sua maioria), já que eram as primeiras aulas. Os grupos dos alunos era divididos por eles mesmo por questões de afinidade, onde raramente o professor mudava-os.

Para a coleta dos dados o professor utilizou um diário de campo no qual registrava alguns diálogos tidos com os alunos, como também as discussões das plenárias, dos consensos e das formalizações dos conteúdos; além disto, também fez parte do material da coleta as folhas de resposta dos problema de cada um dos alunos, o qual o professor recolhia ao término de cada aula.

DESENVOLVIMENTO

Em uma revisão de literatura inicialmente conseguimos encontrar trabalhos que versavam sobre o ensino de sistemas de equações e que apontavam esta mesma dificuldade observada. A começar de Rocha (2010) que vendo esta dificuldade inicial que os alunos tinham para realizar a transição da linguagem materna para a algébrica, preparou uma sequência de atividades com o *software Aplusix* para ajudar os alunos da pesquisa e constatou ao término de sua experiência que o trabalho com o *software* ajudou a sanar esta dificuldade que os alunos apresentavam. Pimentel (2010) também percebeu na sua pesquisa que além da dificuldade na transição havia a insistência por parte dos alunos em resolverem os problemas mais pela via aritmética do que pela via algébrica.

Por sua vez, Goulart (2014) optou por trabalhar sistemas com resolução de problemas a partir da teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel em sua dissertação. Na análise dos resultados, ela percebeu que, em algumas situações, foi fácil para os alunos fazer a conversão da linguagem materna para a algébrica, entretanto, em outras situações, essa transição não foi possível de ser realizada sem a sua ajuda. Nas palavras de Goulart (2014, p.102), “Já na segunda tarefa, em que seis diferentes situações foram propostas, os alunos apresentaram maior dificuldade na conversão para a linguagem algébrica e resolução dos itens **e** e **f**”. No fim, a autora constatou que a sequência utilizada conseguiu levar os alunos à aprendizagem significativa com auxílio da resolução de problemas do conteúdo de sistemas de equações.

Encontramos em Cury e Bisognin (2009) em um artigo publicado na Bolema uma pesquisa realizada pelas autoras com calouros de oito Instituições de Ensino Superior de cursos de Engenharia, Arquitetura, Ciência da Computação, Ciências Contábeis e Licenciatura em Matemática, na qual eles realizaram uma prova de múltipla escolha com 12 questões e as autoras se colocaram para analisar a questão que teve mais acertos, pois também solicitaram que os participantes deixassem por escrito os cálculos que usaram para resolver cada questão.

A questão escolhida foi a seguinte:

> O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é:
> a) 5.000 b) 13.000 c) 18.000 d) 23.000 e) 41.000
> (CURY; BISOGNIN, 2009, p.4.)

A referida questão obteve 63% de acertos por parte dos alunos (24% marcaram opções incorretas e 13% nada responderam) e a conclusão que Cury e Bisognin (2009, p.17) chegaram ao término de avaliar as formas que os alunos responderam foi que “muitos desses estudantes ainda apresentam dificuldades no uso da simbologia necessária a um aluno de Cálculo Diferencial e Integral ou de Álgebra Linear”.

Para então contribuir com um melhor aprendizado deste conteúdo optamos por escolher a metodologia da Resolução de Problemas seguindo as ideias de Andrade e Onuchic (2017) conhecida como Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Na perspectiva de ensinar algum conteúdo matemático através da metodologia de Resolução de Problemas exposta, Andrade e Onuchic (2017) apresentam um roteiro de como se trabalhar com ela em sala de aula que consiste inicialmente em preparar o problema que irá utilizar; para depois entregar aos alunos, com eles divididos em grupos, uma cópia de cada problema e dar tempo para que cada aluno leia e tente entender o mesmo e assim depois fazer uma leitura em conjunto para sanar alguma dúvida que possa existir sobre, por exemplo, algum termo do problema. Após as leituras se dá um tempo para que os alunos se coloquem a resolver o problema, cabendo ao professor observar e incentivar os alunos a explorarem-no. Depois de um tempo que os alunos já começaram a resolver o problema, se pede que um integrante de cada grupo vá a lousa registrar o que o seu grupo fez para depois começar um momento de plenária. Neste momento os alunos são chamados a debaterem em cima do que foi escrito no quadro, aonde o professor media todo o processo até chegarem em um consenso sobre o resultado correto para então o professor fazer a formalização do conteúdo que quis ensinar a partir do problema que foi escolhido. A atividade não acaba apenas na resolução: as autoras indicam que ao término da resolução os alunos sejam instigados a criar seus próprios problemas. Isto é uma oportunidade de levar os alunos a aumentar suas habilidades de resolver e compreender as ideias matemáticas básicas presentes neles, porque a proposição tanto é uma parte integrante desta forma de aprender Matemática, como também é uma ferramenta para se ensinar por meio da resolução de problemas.

Aliada a Resolução escolhemos também o uso das representações múltiplas conforme Goldin e Shteingold (2001) e Friedlander e Tabach (2001) apontam.

Friedlander e Tabach (2001) falam que existem quatro tipos de representação: a representação verbal que é a mais utilizada e que além de indicar a resposta escrita, também indica a exposição oral da mesma; a representação numérica que é a que precede a algébrica e é a mais utilizada inicialmente para se resolver problemas matemáticos, podendo ser bem trabalhada para se chegar a algébrica; a representação algébrica permite generalizações sendo a única forma de justificar provas ou declarações no geral, contudo precisa ser introduzida com cuidado aos alunos para que o uso intenso de símbolos algébricos não acabem mais prejudicando o aprendizado do que fazendo o aluno perceber que esta foram de representação é uma ótima ferramenta para resolver problemas; por fim há a representação gráfica que diz respeito aos esboços feitos no plano cartesiano, seu apelo visual muitas vezes a torna mais atrativa para os alunos, porém é necessário que se veja suas limitações, como, por exemplo, as escalas utilizadas nos gráficos.

O adequado é que o aluno possa trabalhar com mais de uma representação, pois o que falta em uma pode ser complementado pela outra e vice-versa e assim as ideias que se desejam trabalhar podem ir sendo mais bem assimiladas pelos discentes.

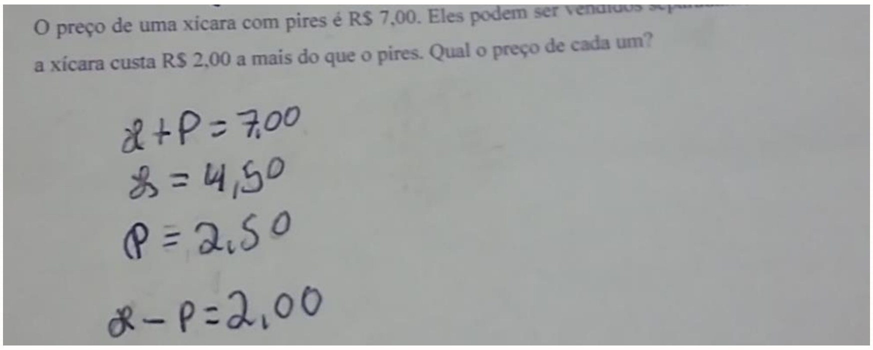
Goldin e Shteingold (2001) explicam ainda que existem dois tipos de representação: as externas e as internas. Em resumo, podemos dizer que as externas são as que podem ser expressas por meio de papel, de desenhos, os esboços geométricos e as equações (que são os 4 tipos citados anteriormente); já as internas são as que são produzidas na mente dos indivíduos para objetos e processos matemáticos. Como as internas variam de pessoa para pessoa e também não podem ser expressas de forma fácil, apenas as externas podem ser avaliadas, é a partir delas que podemos afirmar algo a respeito das representações internas feitas pelos indivíduos, mas também podemos trabalhar nas representações internas deles a fim de aprimorá-las, realizando um bom trabalho no uso das externas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Seguindo a ideia do roteiro proposto por Andrade e Onuchic (2017) sempre que chegamos em sala após falarmos com os alunos, solicitamos que eles se dividissem em grupos e entregamos os problemas para que realizassem a leitura individualmente, para então lermos com eles, a fim de tirar qualquer dúvida no enunciado que ainda pudesse existir e então eles de dedicavam a resolução enquanto percorríamos a sala vendo o que estavam fazendo.

Durante a aplicação do problema problema retirado do próprio livro dos alunos: "O preço de uma xícara com pires é R$ 7,00. Eles podem ser vendidos separadamente e, nesse caso, a xícara custa R$ 2,00 a mais do que o pires. Qual o preço de cada um?" (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015), o registro feito pelo aluno, que chamamos de D e o professor de P, nos chamou a atenção e então começamos a conversar com ele. A figura 1 é o registro de sua escrita e logo abaixo temos o diálogo.

Figura 1: Registro do aluno D



Fonte: Acervo do pesquisador

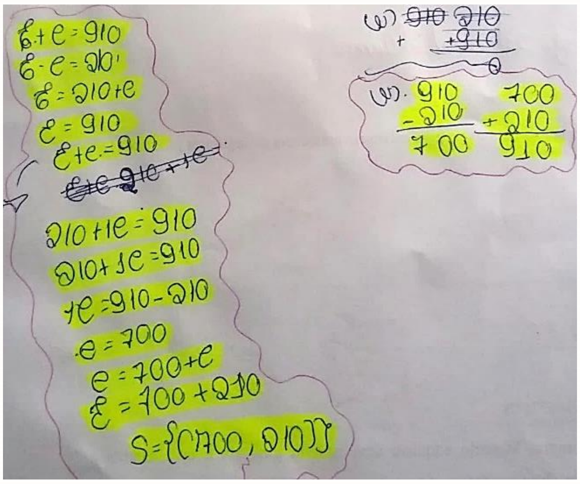
P: Podemos usar as 3 letras diferentes?
D: Hum...
P: Ao total temos quantas mercadorias?
D: Duas.
P: Então?
D: Eu tenho que trocar o 'g' que coloquei da xícara pelo 'x'.
P: Continue agora tentando montar o sistema.

O que ocorreu neste episódio se repetiu em muito outros e também com outros alunos, podemos observar que da parte do aluno D há uma representação verbal quando consegue perceber o próprio erro e então sabe como corrigi-lo na representação algébrica. São nestes momentos de 'explicação do aluno ao professor' que este consegue perceber o processo mental que se passou na cabeça daquele para escrever o que escreveu, que é o que Goldin e Shteingold (2001) discutem quando dizem que só podemos ter acesso e avaliar as representações externas, e delas presumir algo a respeito das internas, ou seja, quais ideias podem estar sendo internalizadas pelos alunos a partir daquilo que estão externando. Além disso, não podemos deixar de observar como as representações verbais auxiliaram as algébricas, fato que Friedlander e Tabach (2001) já observam: o uso de uma representação para ajudar em outra.

Neste episódio o aluno conseguiu corrigir e assim obter o sistema adequado, como em muitos outros casos a passagem da linguagem materna para a algébrica foi possível para os outros alunos, isto é, a dificuldade que observamos e nos levou a pesquisa estava conseguindo ser sanada. Por outro lado, alguns métodos algébricos de resolução não foram perfeitamente assimilados, como podemos constatar no registro abaixo da aluna S, sobre o problema 9, extraído de Brasil (2008, pág.55-56):

> Em um panfleto, uma loja de móveis para escritório anunciava os seguintes produtos:
>
> 
>
>
> Em uma primeira compra, Marcelo adquiriu uma cadeira giratória e uma estante e pagou R$ 910,00 pelos dois produtos. A estante custou R$ 210,00 a mais do que a cadeira giratória.
> a) Construa um sistema de equações para representar a situação.
> b) Calcule o preço de cada produto.

Figura 2: Registro da aluna S



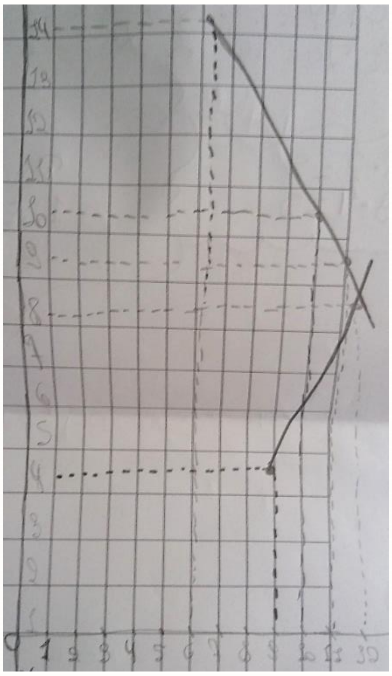
Fonte: Acervo do pesquisador

A aluna S tentou resolver o problema pelo método da substituição e é interessante frisar que só não obteve o sucesso porque na hora de substituir a incógnita "e" pelo seu valor correspondente "210 + c", só pôs o 210, daí ter chegado à resposta errada (tudo isto foi trabalhado no momento do consenso). Este registro revela também o domínio que a aluna demonstrou da representação algébrica na montagem e na resolução do sistema, até porque foi uma das únicas que até antes da plenária e do consenso chegou a este ponto.

No tocante a representação gráfica, foi trabalhado, entre outros, o problema 13 com os alunos que foi elaborado pelo próprio professor: “Esboce o gráfico referente a seguinte frase: ‘Pensei em dois números que somados dão 25 e subtraídos dão 5’.”. Ao iniciarem a resolução, os alunos perceberam uma coisa que o professor não tinha notado na elaboração do problema: as respostas são números inteiros. Entretanto, o objetivo do professor era trabalhar a ideia de aproximação no plano cartesiano, pois ao elaborar o problema se equivocou, já que achou que as respostas dariam números decimais. Quando viu a resposta de um dos grupos dos alunos, então sugeriu aos alunos que ao invés de a soma ser 25, usassem 20 e buscassem esboçar o gráfico. Após ajeitar isto, deu o tempo para que os alunos resolvessem o problema e então chegou o momento da plenária na qual um integrante de cada grupo vai ao quadro escrever seus resultados para então começar o consenso em busca da resposta.

Segue o registro do aluno A que foi o mais discutido na busca do consenso.

Figura 3: Registro do aluno A



Fonte: Acervo do pesquisador

Podemos dizer que o registro do aluno A está quase impecável, tanto é que conseguiu a ‘aproximação’ da solução do sistema no eixo x, apesar de no eixo y não obter a mesma (as dificuldades das escalas como Friendlander e Tabach (2001) já falam desta representação). Este aluno também representou algebricamente o sistema e, embora não o tenha resolvido via álgebra, notamos que foi se baseando nele que achou alguns pares, ou seja, o aluno A conseguiu lidar com as diversas representações de forma a obter no gráfico a solução, o que é um indício de que pode ter assimilado as ideias que trabalhamos, como Goldin e Shteingold (2001) discutem em seus estudos.

Iniciando a plenária, o professor começou perguntando se a representação algébrica estava coerente com o problema e a resposta dos presentes foi sim; os dados numéricos foram facilmente entendidos e na hora dos gráficos o registro do aluno A que estava esboçado com a aproximação que comentamos anteriormente, o professor pôde formalizar o conteúdo no que toca ao falar das limitações da representação gráfica, mas que numa aproximação se constataria o par que era solução do sistema e que se o resolvessem achariam este par, ou se obedecessem às condições de soma e subtração do problema, via representação numérica, teriam a confirmação da solução: (12,5; 7,5).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os três exemplos que conseguimos expor nestas páginas – e que ocorreram em muitos outros momentos de nossa pesquisa - nos revelam algumas das potencialidades que a Resolução de Problemas e as Representações Múltiplas possuem para o trabalho com os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

A começar do episódio com o aluno D, conseguimos perceber como ouvir os alunos para conseguir relacionar o que se passa em suas mentes com aquilo que escreveram, conforme dizem Goldin e Shteingold (2001) quando abordam as questões das representações internas e externas, e saber como agir nas representações usadas pelos mesmos a fim de ajudá-los a chegar a formar a ideia sobre os sistemas de equações polinomiais do 1º grau, foi algo muito necessário.

O episódio da aluna S nos permite inferir que a dificuldade na passagem da linguagem materna para a algébrica dos alunos estava conseguindo ser contornada como, aliás, os outros episódios também apontam, neste quesito, por exemplo, o caso do aluno A é emblemático, já que como foi exposto o mesmo conseguiu usar de praticamente todas as representações indicadas por Friendlander e Tabach (2001) na resolução do problema. Todavia, o caso da aluna S revelou como é preciso ser mais trabalhado o ensino das formas de resolução algébrica (substituição, neste caso, por exemplo).

O episódio do aluno A, no qual após a plenária e o consenso o professor conseguiu formalizar as observações a respeito das limitações da representação gráfica para os alunos, revela como estes últimos momentos da metodologia da Resolução de Problemas, sugeridos por Andrade e Onuchic (2017) contribuem muito para o aprendizado dos alunos, já que a partir deles que os alunos podem confirmar, ou não, se entenderam o que se estava sendo passado e então gerar um debate onde todos participam para construir e chegar na resposta (no consenso) certa – fato que ocorreu em outros momentos de nossa pesquisa, contudo não conseguimos chegar ao ponto no qual os alunos a partir destas formalizações conseguissem criar os seus próprios problemas.

Portanto, a plenária, o consenso, a formalização do conteúdo, a importância do ouvir o aluno e entender suas representações internas que se relacionam com as externas, o uso de mais de uma representação para lidar com os sistemas foram potencialidades que encontramos para tentar sanar as dificuldades no trabalho com os sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.

Aos interessados em aprofundar os estudos dos sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas a partir de nosso trabalho, sugerimos que possam desenvolver mais a parte da representação gráfica através de aplicativos eletrônicos que permitam elaborar os gráficos próprios de cada equação dos sistemas, e assim conseguir fazer mais pontes entre esta forma de representação e as outras. Sugerimos também que possam trabalhar mais as partes do ensino dos métodos resolutivos algébricos: adição, substituição e até mesmo o da comparação (que não abordamos). Indicamos ainda que possam realizar pesquisas com este conteúdo dentro da perspectiva da exploração e proposição de problemas que são outras duas vertentes dentro do trabalho com problemas.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, C. P.; ONUCHIC, L. R. Perspectivas para Resolução de Problemas no GTERP. *In*: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 433-466.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução Maria J. Alvarez, Sara B. Santos e Telmo M. Baptista. Porto (Portugal): Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa gestão da aprendizagem escolar** - GESTAR II. Matemática: Atividades de Apoio à Aprendizagem 6 - AAA6: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos (Versão do Aluno). Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2008.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática nos dias de hoje 8º ano**: na medida certa. São Paulo: Leya, 2015.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E. Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro - SP, v. 22, n. 33, p. 1-22, 2009.

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting multiple representations in algebra. *In*: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (ed.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston: NCTM, 2001. p. 173-185.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisas**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GOLDIN, G.; SHTEINGOLD, N. Systems of representations and the development of mathematical. *In*: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (ed.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston: NCTM, 2001. p. 11-23.

GOULART, A. M. A. **A aprendizagem significativa de sistemas de equações do 1º grau por meio da resolução de problemas**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2014.

LANKSHEAR, C. KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica**: do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PIMENTEL, D. E. **Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para transição da aritmética para a álgebra**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino em Ciências Exatas e Tecnologia) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

ROCHA, F. de O. **Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do ensino fundamental**: método da substituição. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.