

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE SISTEMAS LINEARES ATRAVÉS DOS COEFICIENTES ANGULAR E LINEAR DA RETA UTILIZANDO COMO RECURSO DIDÁTICO O GEOPLANO

Hélio Oliveira Rodrigues¹

¹Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Pernambuco DEaD-IFPE; FAINTVISA-PE
e-mail:helioosr@hotmail.com

RESUMO

Nos dias atuais, a História da Matemática é um campo de investigação que tem crescido bastante nas últimas décadas, tanto em termos científico, quanto no campo educacional e tem trazido, conseqüentemente, grandes contribuições, principalmente no que diz respeito à socialização do conhecimento matemático. O presente estudo tem como objetivo, discutir os sistemas de equações lineares através dos coeficientes angular e linear das retas. O estudo envolveu 19 (dezenove) alunos de uma escola pública estadual e justifica-se, pela necessidade de se buscar alternativas de ensino para o Professor na sala de aula e recursos didáticos que contribuam com a aprendizagem do aluno integrando teoria e prática. Os fundamentos teóricos do trabalho foram desenvolvidos a partir de uma abordagem a História da Matemática, tendo seus fundamentos metodológicos apoiados na Teoria da Aprendizagem Significativa. Através do confronto dos questionários investigativos, utilizando análises pareadas em função do **TESTE T** foi possível observar que a utilização dos materiais concretos manipulativos pode contribuir de forma significativa, para uma melhor compreensão da posição relativa de duas retas no plano a partir do momento em que as questões foco da pesquisa apresentaram um nível de significância de 95%, apontando que os resultados obtidos foram satisfatórios.

Palavras Chave: Aprendizagem Significativa, Coeficiente Angular e Linear da Reta, Recurso Didático.

INTRODUÇÃO

A história da matemática é um forte aliado para os professores que buscam inovações para suas aulas, pois, a utilização de alguns traços relacionados a aritmética, álgebra e geometria, marcando até os nossos dias o seu processo evolutivo, se caracteriza como de fundamental importância, para que o aluno tenha um melhor entendimento sobre os construtos básicos do que se pretende ensinar. O estudo teve seus fundamentos teóricos estruturados nas concepções de Lima (2001), Eves (2008), Santos (2008), Rodrigues (2011), entre outros. Já os fundamentos metodológicos foram desenvolvidos através das considerações de Moreira (2003), Oliveira (2008) e Ausubel (*apud* Rodrigues, 2011). A pesquisa justifica-se, pela necessidade de discutir os as soluções dos sistemas lineares, devido a grande abstração através de uma discussão em função, não apenas das posições relativas, mas, dos coeficientes angular e linear da reta, apresentando para o aluno tanto a parte algébrica como sua representação geométrica utilizando como recurso didático o tabuleiro geoplano. Do estudo participaram 19 (dezenove) alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio,

onde os resultados foram satisfatórios a partir do momento que ficou constatada uma aprendizagem superordenada.

Problema de Pesquisa

Qual a importância da discussão de um sistema de equações lineares a partir dos coeficientes angular e linear das retas?

Objetivo Geral

Analisar a discussão de sistemas lineares através dos coeficientes angular e linear das retas.

Objetivos Específicos

- ✓ Levantar informações sobre como está sendo o desenvolvido do ensino dos sistemas de equações lineares;
- ✓ Compreender através das informações levantadas o ensino dos sistemas de equações lineares;
- ✓ Sugerir alternativas que contribuam com a discussão dos sistemas de equações lineares a partir dos coeficientes angular e linear da reta.

Breve Relato Sobre a História da Álgebra

Segundo Eves (2008), existem evidências da álgebra no Papiro de Rhind 1950 a.C., escritos pelos egípcios, nos problemas geométricos babilônicos na tábua de Strasburgo que data 1800 a.C., e tábua Louvre a cerca de 300 a.C., que são problemas relativos a triângulos, outras civilizações que mostravam outras evidências foram os gregos que utilizavam alguns processos algébricos e álgebra geométrica vindo dos livros dos elementos de Euclides. A álgebra é uma matemática representada por símbolos ou incógnita desde os papiros egípcios. Com o passar do tempo modificou de acordo com cada civilização egípcia, grega e chinesa. Mais tarde Na França no séc. XVII. François Viète (1540-1603) usava qualquer letra maiúscula A, B, C, D para representá-la, na Alemanha Leibniz, no séc. XVIII usava qualquer letra, mas foi Descartes (1596–1650), quem consolidou definitivamente a utilização das letras do alfabeto latino x, y e z, para representar as incógnitas. Outros registros algébricos se deram a partir das equações lineares, há muito tempo vêm sendo utilizadas para a resolução de problemas do tipo algébrico e um dos mais antigos encontra-se nos papiros Egípcios onde já foi citado.

Santos ainda aponta, que os primeiros registros sobre as equações lineares são tratados no Papiro de Ahmes também conhecido como Papiro de Rhind, onde os chineses foram os primeiros povos a usar um método sistemático para resolver sistemas de equações lineares cuja essência é idêntica ao moderno método de eliminação de Gauss ou de escalonamento.

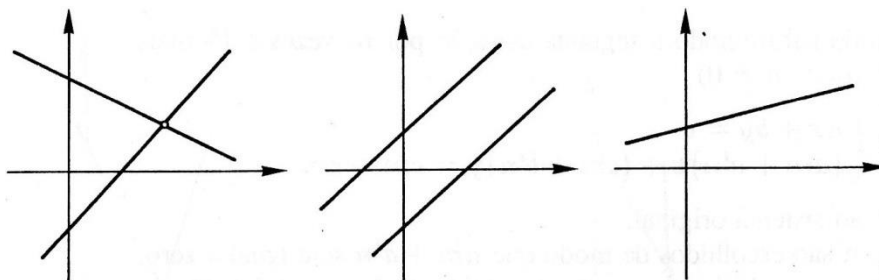
Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, tal como:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

é uma situação problema que consiste em achar números x , y que cumpram simultaneamente as duas condições acima. Uma solução do sistema (S) é um par (x,y) para os quais as igualdades (S) são satisfeitos. Procurar as soluções de (S) equivale a tentar achar um ponto do plano que esteja simultaneamente nas retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$.

Do ponto de vista geométrico, o sistema (S) tem uma única solução quando as retas dadas são concorrentes, nenhuma solução se elas são paralelas e uma infinidade de soluções quando essas retas coincidem.

Figura 01:Retas concorrentes **Figura 02:**Retas paralelas **Figura 03:**Retas coincidentes



Fonte: Lima, (2001)

No que se refere ao ponto de vista algébrico, um sistema linear com uma única solução é determinado se, e somente se, $ab' - ba' \neq 0$. Neste caso, a solução (x,y) é dada explicitamente pelas expressões abaixo segundo (LIMA, 2001):

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad \text{e} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

A expressão acima é calculada pela regra de Cramer (1704-1752), publicada em 1750 e provavelmente já era conhecida por Maclarium (1698–1746), desde 1729 ao escrever uma álgebra intitulada Arithmetica de Maclarium publicada em 1748.

Através de uma análise pode-se verificar que quando as retas são paralelas e distintas não existe par ordenado, ou seja, a solução do sistema é dada como impossível (SI). Quando as retas são concorrentes, indicam a existência de um único par ordenado, que é solução do sistema, ou seja, o sistema é possível e determinado (SPD). Já, quando as retas são coincidentes indicam que existem infinitos pares ordenados como solução do sistema, ou seja, o sistema é possível e indeterminado (SPI). Assim, quando as retas são paralelas os coeficientes angulares possuem as mesmas medidas, quando são concorrentes os coeficientes angulares são diferentes, os coeficientes lineares poderão ser diferentes ou não e quando as retas são coincidente os coeficientes angular e linear, possuem a mesma medida. Portanto, as intersecções das retas só vão acontecer quando as retas forem concorrentes para satisfazer as duas equações. Para Contador (2005), toda equação do tipo $a.x + b.y + c = 0$ é conhecida como equação geral da reta no plano, onde com $b \neq 0$, se pode então escrever:

$$b.y = -a.x - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}.x - \frac{c}{b}$$

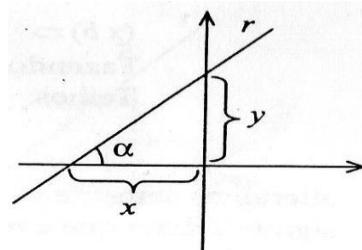
A partir dessa equação fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$, se obtém $y = m.x + n$, que é a forma algébrica conhecida como equação reduzida da reta, onde:

$m =$ *coeficiente angular*

$n =$ *coeficiente linear*

Assim, a reta que admite como equação $4x - 3y + 2 = 0$ pode ser descrita na forma $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$, onde o coeficiente angular é $\frac{4}{3}$ e o coeficiente linear é $\frac{2}{3}$.

Figura 04: Caracterização dos coeficientes angular e linear



Fonte: Contador, (2005).

Pela equação $y = m.x$ pode se chegar a $m = \frac{y}{x}$ e, pela forma geométrica apresentada anteriormente pode ser observado que a citada relação não é estranha, pois para o triângulo retângulo formado pela reta r e pelos eixos x e y , possibilita o cálculo da tangente do ângulo α formado entre a reta r e o eixo x no sentido anti-horário. Desta forma, como a tangente de um ângulo é dada pela medida do cateto oposto sobre o cateto adjacente pode-se concluir que:

$m = \text{tg } \alpha$. Isto possibilita verificar que, para a equação $y = m.x$, quanto maior for o valor de m , maior será a inclinação da reta. O coeficiente angular da reta também é conhecido pelos seguintes nomes: inclinação, declive ou declividade.

Desta forma, de posse de alguns importantes conceitos, pode-se generalizar as posições relativas de duas retas no plano, ou seja:

Sejam r e s duas retas não paralelas aos eixos x e y , cujas respectivas equações reduzidas são dadas por:

$$y = m.x + n \quad \text{e} \quad y = m'.x + n'$$

Logo, a partir de 3 (três) afirmativas acima, conclui-se que:

- i) Se $m = m'$ e $n = n'$, então, r e s são coincidentes;*
- ii) Se $m = m'$ e $n \neq n'$, então, r e s são paralelas;*
- iii) Se $m \neq m'$, então, r e s são concorrentes.*

Portanto, de acordo com as 3 (três) condições acima citadas, em relação as condições das retas r e s aos eixos x e y , suas respectivas gerais podem ser definidas da seguinte forma a partir das equações, ou seja:

Tendo-se:

$$a.x + b.y + c = 0 \quad \text{e} \quad a'.x + b'.y + c' = 0 \quad \text{com} \quad c \neq 0 \quad \text{e} \quad c' \neq 0$$

Pode-se afirmar que:

Se,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}, \text{ então, } r \text{ e } s \text{ são coincidentes;}$$

Se,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}, \text{ então, } r \text{ e } s \text{ são paralelas e;}$$

Se,

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}, \text{ então, } r \text{ e } s \text{ são concorrentes.}$$

Desta forma, acredita-se ser possível promover uma discussão de sistemas lineares através dos coeficientes angular e linear da reta, não apenas pela importância da conceitualização geométrica e analítica, mas, para possibilitar uma melhor visão entre os dois conteúdos vivenciados no ensino médio.

Tal procedimento possibilitará ao aluno, não apenas, uma melhor compreensão do que está sendo ensinado, a integração entre a teoria e prática. Isto está corroborado com as concepções de Ausubel (*apud* Rodrigues, 2011), quando ele aponta no que se refere a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, que:

Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas, na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos. Entretanto, a experiência cognitiva não se restringe à influência direta dos conceitos já aprendidos sobre componentes da nova aprendizagem, mas abrange também modificações relevantes nos atributos da estrutura cognitiva pela influência do novo material. Há, pois, um processo de interação, por meio do qual conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com o novo material, funcionando como ancoradouro, isto é, abrangendo e integrando este material e, ao mesmo tempo, modificando-se em função dessa ancoragem.

Tais propósitos, também podem ser observados através das concepções de Vergnaud (*apud* Rodrigues, 2011), quando ele aponta que o conceito é muito importante na matemática para fazer algumas análises, a partir do momento que se considera o campo conceitual como uma unidade de estudo para dar sentido às dificuldades observadas na conceitualização do real. Neste sentido, acredita-se que A Teoria dos Campos Conceituais supõe que a conceitualização é a essência para o desenvolvimento cognitivo do aluno, ou seja:

S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito;

I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto;

R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Uma definição pragmática poderia considerar um conceito como um conjunto de invariantes utilizáveis na ação, mas esta definição implica também um conjunto de situações que constituem o referente e um conjunto de esquemas postos em ação pelos sujeitos nessas situações.

Princípios Norteadores Sugeridos pelos PCN's para a Sistematização do Ensino da Matemática

Segundo os PCN's (2001), o ensino da matemática é uma tarefa muito difícil, tanto para quem ensina quanto para quem aprende, onde a matemática por ser uma área muito importante do conhecimento humano é instrumento essencial para construção de conhecimento em outras áreas. Neste sentido, as insatisfações apontam a necessidade de se melhorar o ensino, que é centrado em procedimentos mecânicos, totalmente desprovidos de significados para o aluno e sem contextualizações. Daí a urgência em reformular objetivos e rever conteúdos, para se buscar metodologias compatíveis. Os PCN's ainda mostram que no ensino da Matemática, dois aspectos importantes devem ser seguidos: um consiste em o aluno poder relacionar observações do mundo real com representações, esquemas, tabelas e figuras, o outro consiste em o aluno poder identificar essas representações como princípios e conceitos matemáticos. No entanto nesse processo, a comunicação tem grande importância para os alunos e deve ser estimulada, de forma permanente fazendo com que o aluno venha a “falar” e a “escrever” sobre Matemática. Esses aspectos se caracterizam como significativo para aprendizagem do aluno, à medida que envolve o mesmo no aprendizado de novos conteúdos, elaborando significados aos saberes matemáticos. Rodrigues ainda aponta que os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de matemática no Ensino Fundamental estão pautados alguns princípios decorrentes de estudos, pesquisas práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos, estando alguns destes princípios demarcados da seguinte forma:

- i)* A matemática é componente importante na construção da cidadania, precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino é meta prioritária do trabalho docente;
- ii)* A atividade matemática escolar é a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se sirva dele para compreender e transformar sua realidade;
- iii)* No ensino da matemática destacam-se dois aspectos básicos: o primeiro consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); o outro consiste em relacionar estas representações com princípios e conceitos matemáticos;
- iv)* A aprendizagem matemática está ligada à compreensão. O significado da matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ele e as demais disciplinas;
- v)* A lógica interna da matemática não deve ser o único critério para a seleção e organização de conteúdo.

Sua relevância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno devem ser levados em conta;

vi) A apresentação do conhecimento matemático ao aluno, que se encontra em constante evolução, deve ser feito através do contexto histórico o qual contribuirá para a contribuição que o aluno dará ao mundo;

vii) A avaliação é parte do processo de ensino e aprendizagem. Ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos alunos, como aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes.

Também devem ser avaliados aspectos como seleção e dimensionamento dos conteúdos, práticas pedagógicas e condições em que se processa o trabalho escolar.

Desta forma, o presente estudo tem como objetivo ir a busca de novas metodologias, para que o aluno consiga entender o significado da discussão de Sistemas de Equações Lineares de forma concreta, para a partir daí ele possa ter uma melhor compreensão através dos coeficientes angular e linear da reta, bem como de suas representações geométricas através de recursos didáticos. No entanto a atividade matemática escolar não é olhar apenas, para coisas prontas e definidas, mas, construir novas ideias significativas, pois a aprendizagem da matemática está totalmente ligada a compreensão dos significados.

METODOLOGIA

A metodologia adotada no presente estudo teve uma abordagem quantitativa, qualitativa, exploratória de forma descritiva. Quantitativa por quantificar os dados através das informações obtidas a partir dos questionários investigativos (MOREIRA, 2003). Qualitativa por incentivar através da análise novas perspectivas, ideias e conceitos a partir dos dados obtidos (OLIVEIRA, 2008). Oliveira ainda aponta que uma pesquisa se caracteriza como Exploratória de forma descritiva por possibilitar a exploração e descrição os dados a partir das análises do fenômeno estudado. O trabalho visa a busca por alternativas que contribuam com esse campo do conhecimento e, por isso, nem sempre será investido um aprofundamento dos conteúdos abordados. O maior interesse se estabelece em buscar alternativas de ensino, para os professores do Ensino Médio, não apenas, para que eles possam organizar e estruturar do ensino, mas também, inserir seus alunos no mundo matemático através da integração entre a teoria e a prática.

Os procedimentos metodológicos do estudo foram desenvolvidos a partir de 5 (cinco) momentos. No primeiro foi aplicado um questionário investigativo inicial. No segundo, foi socializado um texto de apoio, como organizador prévio Silva e Moreira (2006), para apresentar os construtos básicos sobre o que se pretende ensinar. No terceiro momento, foi realizada uma intervenção visando a estruturação dos conceitos básicos da condição de alinhamento de duas retas no plano. No quarto foi desenvolvida uma atividade em grupo, utilizando como recurso didático o tabuleiro geoplano, na tentativa de integrar teoria e prática. No quinto e último momento foi aplicado um questionário investigativo final, para que fosse realizado um confronto e verificar se houve ou não evolução após a estruturação da sistematização de ensino. Tais procedimentos se apoiam nas concepções de Ausubel (*apud* Rodrigues, 2011) visando a obtenção de uma Aprendizagem Significativa.

DESCRIÇÃO DAS ANÁLISES DOS DADOS DA PESQUISA

As informações obtidas no questionário investigativo Inicial foram organizadas e registradas na **Tabela 01**, para uma melhor análise, percepção e discussão dos resultados.

Tabela 01: Referente ao questionário investigativo Inicial

Questões	Respondeu				NR		Total de alunos
	RA	%	RI	%	%		
01	7	36,85	12	63,15	0	0,00	19
02	0	0,00	16	84,20	3	15,80	19
03	0	0,00	16	84,20	3	15,80	19
04	0	0,00	15	78,95	4	21,05	19

As informações registradas na **Tabela 02** estão relacionadas com as questões do questionário investigativo final, composto pelas mesmas questões do questionário investigativo Inicial. Isto se deu pela necessidade de um confronto entre os dois questionários.

Tabela 02: Referente ao questionário investigativo final

Questões	Respondeu				NR		Total de alunos
	RA	%	RI	%	%		
01	15	78,95	4	21,05	0	0,00	19
02	13	68,40	5	26,30	1	5,30	19
03	15	78,95	4	21,05	0	0,00	19
04	8	42,10	9	47,40	2	10,50	19

As análises desenvolvidas junto aos participantes da pesquisa foram realizadas com 04 (quatro) questões dos questionários investigativos inicial e final.

Porém, para efeito de sistematização e definição da pesquisa foram utilizadas apenas 03 (três), questões, ou seja, 02, 03 e 04 que no estudo se caracterizaram como questões foco da pesquisa. Vale salientar, que o confronto entre os questionários investigativos **Inicial x Final**, dessas questões se deu a partir do **TESTE T de Student**, para um nível de significância de $\alpha = 0,05$. Nas análises do questionário investigativo inicial pode ser verificado que nas situações problemas propostas apresentaram resultados não houve acertos. Já nas análises do questionário investigativo final foi possível perceber que a média percentual foi de 63,15% de acertos obtidos após, apresentando resultados altamente significativos. Isto aponta uma diferença percentual de 63,15% em favor do questionário investigativo final, mostrando que os objetivos da pesquisa foram almejados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E DEFINIÇÃO DA PESQUISA

Através do confronto dos questionários investigativos, utilizando análises pareadas em função do **TESTE T** foi possível observar que a utilização dos materiais concretos manipulativos pode contribuir de forma significativa, para uma melhor compreensão da posição relativa de duas retas no plano. Tal fato se caracterizou, a partir do momento em que no confronto dos questionários investigativos inicial e final das questões foco da pesquisa, foi constatado que a hipótese inicial H_0 foi rejeitada a um nível de significância de 5%, garantindo um nível de confiabilidade de 95%. Portanto, isto aponta que o questionário investigativo final foi mais satisfatório do que o questionário investigativo inicial.

REFERÊNCIAS

- CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática uma breve história**. v. 3. 1 ed. São Paulo – SP. Editora Livraria da Física, 2005.
- EVES, Howard, tradução: Hygino H. Domingues, *Introdução à história da matemática*. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2008.
- GARBI, G.G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- LIMA, Elon Lajes. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Coleção matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2001.

MOREIRA, Marco A. **Sobre Monografias, Dissertações, Teses, Artigos e Projetos de Investigação: Significados e recomendações para Principiantes na Área de Educação Científica.** In: ActasdelPIDEC: textos de apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos. v. 5. Editores: Marco Antônio Moreira e Concesa Caballero. Porto Alegre: UFRGS, 2003.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses.** 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. *Primeiro e segundo ciclo.* Brasília: MEC/SEF, 2001.

RODRIGUES, H. O. **Aprendizagem Significativa da Matemática a Partir da resolução da equação do 2º Grau Inspirado em Procedimentos Babilônicos Utilizando como recurso Didático o Geoplano.** Publicado em Anais do XIII Encontro Baiano de Educação matemática. UESB – Jequié, BA, 2009.

RODRIGUES, H. O. **Importância da Utilização de Recursos Didáticos em um Processo de Transposição Didática para Promover Aprendizagem Significativa.** Tese de Doutorado apresentada a Universidad Del Mal - Chile, para obtenção do título de doutor em agosto de 2011.

SILVA, J. R. y MOREIRA, M. A. **Uso de um texto de apoio como organizador prévio: combinatória para o ensino fundamental e médio.** V Encuentro Internacional sobre Aprendizagem Significativa. Centro Superior de Estudios Universitarios LA SALLE, Madrid, España, 11-15 de septiembre, 2006.

SANTOS, E. M. **Uma proposta de ensino para os sistemas de equações lineares utilizando como recurso didático o geoplano.** VIII Encontro Paraibano de Educação Matemática - EPEM, Campina Grande – PB, 2008.