APLICAÇÕES DAS FÓRMULAS DE FRENET EM CURVAS PLANAS E ESFÉRICAS

Adailson Ribeiro da Silva; Carlos Rhamon Batista Morais; Alecio Soares Silva; José Elias da Silva

Universidade Estadual da Paraíba; adailsonribeiro1@gmail.com; carlosrhamonmorais@gmail.com; mataspr@hotmail.com; elias.matematico@hotmail.com

INTRODUÇÃO

O conteúdo de curvas no espaço Euclidiano é abordado nas disciplinas introdutório de Geometria Diferencial, utilizando para isso as noções de álgebra linear e cálculo diferencial, sendo esta possuidora de diversas aplicações nas áreas de Topologia, Análise, Álgebra, Equações Diferenciais e Física-Matemática.

Podemos pensar em uma curva no espaço euclidiano R^3 , como sendo obtida a partir de uma reta quando esta é entortada ou torcida. Pensando um pouco sobre esta construção, somos levados a seguinte afirmação: será que o comportamento local de uma curva pode ser descrito completamente pela curvatura e torção? Veremos que essa afirmação é verdadeira.

Dentre os métodos para resolver problemas em geometria, o mais eficaz consiste na escolha de um sistema de coordenada adaptado ao problema. Para este estudo dispomos de um sistema de coordenadas natural, o triedro de Frenet que foi criado pelo francês Jean Frédéric Frenet, sendo formado por três vetores unitários e ortogonais entre si T,N e B .

As fórmulas de Frenet descrevem as propriedades de uma partícula que se move ao longo de uma curva contínua e diferenciável ou as propriedades geométricas da própria curva, independentemente do movimento no espaço euclidiano tridimensional R^3 . Mais especificamente, as fórmulas descrevem as derivadas dos vetores unitários tangente, normal, e binormal uns em relação aos outros.

Dentre o estudo de curvas, podemos destaca as curvas planas e esféricas. Nosso objetivo é estudar os casos em que podemos aplicar as fórmulas de Frenet para resolver problemas que envolvem esses dois tipos de curvas.

METODOLOGIA

A pesquisa é exploratória, pois tratar-se de um estudo baseado no livro Geometria Diferencial das Curvas e Superfícies, de Manfredo Perdigão do Carmo. O desenvolvimento do trabalho se deu através de exposições realizadas uma vez por semana, onde se destinava duas horas para a exposição mediante o acompanhamento do professor orientador.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Entre os temas já estudados do projeto destacamos: curvas no espaço Euclidiano e as fórmulas de Frenet. A seguir fazemos uma breve descrição de cada um destes temas.

Curvas no espaço euclidiano R^3

Denotaremos por R^3 o conjunto das ternas ordenadas (x_1, x_2, x_3) de números reis. Diremos que uma função de uma variável real é diferenciável (ou suave) se ela possui, em todos os pontos, derivadas de todas as ordens.

Seja I um intervalo aberto na reta real R. Interpretaremos liberalmente isto de maneira que não somente se incluía o tipo habitual de intervalo aberto $a < t < b$, onde a, b são números reais. Mas também os tipos $a < t$, $t < b$ e toda a reta real.

Podemos representar uma curva em R^3 como a trajetória de um móvel α. Em cada momento t de um intervalo aberto, se localiza α no ponto

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

de R^3. Temos que α é uma função de I a R^3, e as funções de valores reais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são funções coordenadas euclidianas. Assim definiremos a função α como diferenciável sempre que as suas funções coordenadas forem diferenciável.

Definição: Uma curva em R^3 é uma função diferenciável $\alpha: I \subset R \to R^3$ de um intervalo aberto I em R^3.

Definição: seja $\alpha: I \to R^3$ uma curva com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Para cada número t, o vetor velocidade de α em t é o vetor tangente

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\right)_{\alpha(t)},$$

no ponto $\alpha(t)$ de R^3.

Definição: Sejam I e J intervalos abertos da reta real R. Sejam $\alpha: I \to R^3$ uma curva e $h: J \to I$ uma função diferenciável. Então, se diz que a função composta $\beta = \alpha(h): J \to R^3$ é uma curva parametrizada de α por h.

Em cada momento s do intervalo J, a curva β estará em um ponto $\beta = \alpha(h(s))$, que a curva α alcança no momento $h(s)$ do intervalo I. Portanto, β segue o mesmo caminho de α, mas em geral β chegar a um ponto dado em um momento diferente de α.

Definição: Seja $\alpha: I \subset R \to R^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento do arco, então:

(i) Definimos o vetor velocidade de α em t, por $\alpha'(t)$;
(ii) Definimos o comprimento do vetor velocidade, como sendo:

$v(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2 + (\alpha'_3(t))^2}$, onde $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$.

Observação: O comprimento de arco de uma curva $\alpha: [a, b] \to R^3$ é dado por

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Às vezes o único interesse é o estudo de problemas envolvendo trajetórias de uma curva ao invés da velocidade de uma partícula que a percorre. Uma maneira de omitir a consideração da velocidade de uma curva consiste em reparametrizá-la por uma curva β com rapidez unitária, ou seja, $\|\beta'\| = 1$.

As fórmulas de Frenet

Seja $\beta: I \subset R \to R^3$ uma curva com velocidade unitária. Então, $T(s) = \beta'(s)$ se chama campo de vetores tangentes unitários a β. Desde que $\|T(s)\| = 1$, sua derivada $\|T'(s)\| = \|\beta''(s)\|$ mede a maneira que tão rápido uma curva se afasta em uma vizinhança de $s \in I$, chamamos de curvatura de β.

Como $\langle T, T\rangle = 1$, então $\langle 2T, T'\rangle = 0$ logo T e T' são ortogonais. Assim T é chamado campo normal a β.

Definição: Seja $\beta: I \subset R \to R^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento do arco $s \in I$. O número positivo $k(s) = \|T'(s)\| = \|\beta''(s)\|$, chama-se curvatura de β.

Vamos considerar que $k > 0$, então o campo vetorial unitário $N = \frac{T}{k}$ dá a direção em que β está se transformando a cada ponto. N se chama campo vetorial normal principal de β (Figura 1). O campo vetorial $B = T \times N$ se chama campo binomal.

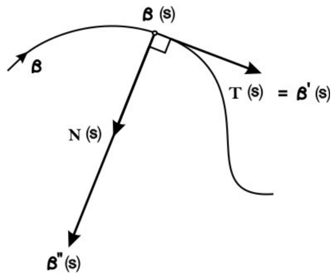

Figura 1

Lema: Seja $\beta: I \rightarrow R^3$ uma curva com $\|\beta'(s)\| = 1$ e $k > 0$. Então, os três campos vetoriais T, N e B são campos vetoriais unitários e ortogonais entre si. Dizemos que T, N e B formam o referencial de Frenet.

O estudo de uma curva consiste em usar um campo de sistema de referencia de Frenet $\{T, N, B\}$ sempre que possível, no lugar do campo natural $\{U_1, U_2, U_3\}$.

Definição: Seja $\beta: I \rightarrow R^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento do arco $s \in I$. O numero real $\tau(s)$ definido por $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ é denominado torção da curva β em s.

Teorema: Seja $\beta: I \rightarrow R^3$ uma curva com velocidade unitária em que $k > 0$ e τ é a torção, então

$$\begin{aligned} T' &= \quad kN \\ N' &= -kT \quad + \tau B \\ B' &= \quad -\tau N \end{aligned}$$

Exemplo: vamos calcular o sistema de referencia de Frenet T, N e B as funções curvatura e torção da hélice $\beta(s) = (a\cos(\frac{s}{c}), a sen(\frac{s}{c}), b\frac{s}{c})$, onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $a > 0$. Então,

$T(s) = \beta'(s) = (-\frac{a}{c} sen(\frac{s}{c}), \frac{a}{c} cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c})$

$\Rightarrow T'(s) == (-\frac{a}{c^2} cos(\frac{s}{c}), \frac{a}{c^2} sen(\frac{s}{c}), 0)$

Portanto,

$k(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}(cos^2\left(\frac{s}{c}\right) + sen^2\left(\frac{s}{c}\right))} = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0$

e

$N(s) = \frac{T'}{k} = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), sen\left(\frac{s}{c}\right), 0\right).$

Observemos que, independentemente dos valores que têm a e b, N sempre aponta diretamente ao eixo do cilindro que descansa β (Figura 2).

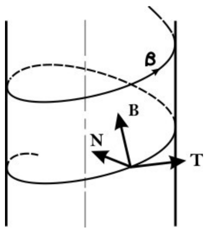

Figura 2

Se aplicarmos a definição de produto a $B = T \times N$, obtemos

$B(s) = \left(\frac{b}{c} sen\left(\frac{s}{c}\right), \frac{-b}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\right). \quad \Rightarrow B'(s) = \left(\frac{b}{c^2} cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c^2} sen\left(\frac{s}{c}\right), 0\right).$

Por definição, $B' = -\tau N$. Se compararmos as fórmulas de B' e de N, concluímos que

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Corolário: Seja $\beta: I \rightarrow R^3$ uma curva com velocidade unitária em que $k > 0$. Então, β é uma curva plana se, somente se, $\tau = 0$.

Lema: Seja $\beta: I \to R^3$ uma curva com velocidade unitária em que $k > 0$ constante e $\tau = 0$, então β forma parte de uma circunferência de raio $\frac{1}{k}$.

Exemplo: Suponha que β é uma curva com velocidade unitária que repousa sobre a esfera Σ de raio a com centro na origem de R^3. Afirmamos que uma curva esférica β tem curvatura $k \geq \frac{1}{a}$.

Para verificar, observemos que todo de Σ dista a da origem, temos que

$$\langle \beta, \beta \rangle = a^2 \Longrightarrow 2\langle \beta', \beta \rangle = 0 \Longrightarrow \langle \beta, T \rangle = 0$$

Assim,

$$\langle \beta', T \rangle + \langle \beta, T' \rangle = 0 \Longrightarrow \langle T, T \rangle + k\langle \beta, N \rangle = 0 \Longrightarrow 1 + k\langle \beta, N \rangle = 0 \Longrightarrow k\langle \beta, N \rangle = -1.$$

Pela desigualdade de Schwarz, temos que

$$|\langle \beta, N \rangle| \leq \|\beta\| \|N\| = a$$

Como $k \geq 0$, temos

$$k = |k| = \frac{1}{|\langle \beta, N \rangle|} \geq \frac{1}{a}.$$

CONCLUSÃO

Este trabalho nos leva a determinar uma condição necessária e suficiente, para obter a curvatura e torção de uma curva plana ou esférica. Além disso, podemos resolver todos os problemas geométricos de curvas planas e esféricas, por meio das formulas de Frenet. Nos casos particulares, talvez resulte somente em anota as informações do problema de maneira conveniente diferenciando e aplicando as fórmulas de Frenet.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Do Carmo, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.

O´Neill, B. **Elementary Differential Geometry**. Rev. 2nd ed, Academic Press, USA, 2006.

TENENBLAT, K. . **Introdução à Geometria Diferencial**. 2a. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2008. v. 1. 270p.