A HISTÓRIA DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CÚBICAS: A RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DO POETA OMAR KHAYYAM COMO PROPOSTA DIDÁTICA

Emanuel Carlos Albuquerque Alves (1); Lucas Siebra Rocha (2);

Daniel Cordeiro de Morais Filho (3)

1 - Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG e Licenciando em Matemática pela *Universidade Federal de Campina Grande* - emanuelc@mat.ufcg.edu.br

2 - Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG e Bacharelando em Matemática pela *Universidade Federal de Campina Grande* - lucass@mat.ufcg.edu.br

3 - Tutor do Grupo PET-Matemática UFCG e Professor Titular da *Universidade Federal de Campina Grande* - daniel@mat.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

O ensino da matemática descontextualizado provoca o desestímulo do aluno frente a matéria, pois a apresenta como sendo mero exercício mecânico e sem utilidade ou significado. Nessa perspectiva, o uso da História da Matemática revela-se como um ótimo recurso metodológico para o processo de ensino e aprendizagem, pois os problemas matemáticos, tratados sob uma óptica histórica, surgem em sua maioria de problemas reais enfrentados pela sociedade e revela a real necessidade histórica para uma ideia matemática possa surgir e ser desenvolvida. Mais do que isso, a história em si, também revela essa tão procurada contextualização em sua mais ampla acepção (vide [ABREU & SILVA], [ABREU]).

Ademais, segundo [SECRETARIA]:

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. (OCM, 2006, p. 86)

Objetivando apresentar temas matemáticos sob essa óptica, pretendemos neste trabalho tratar da resolução de equações cúbicas, utilizando a História da Matemática como recurso metodológico. Em geral, as equações do terceiro e quarto grau têm importância menosprezada no Ensino Médio, mas são elas uma formidável fonte de como a História e a Matemática interagem de forma interessante, chegando a ser romanceada, como em [GARI]. Corroborando essa nossa visão, em [ELON], destaca-se outros elementos atraentes ao se tratar da história da solução destas equações na sala de aula:

> A história da solução da equação de terceiro grau tem vários aspectos interessantes, em virtude dos quais ela se constitui num tópico atraente para estudo e discussão entre professores e alunos de Matemática.
>
> Um desses aspectos é o enigma histórico. Se os babilônios já sabiam resolver a equação do segundo grau mil e setecentos anos antes da era cristã, por que se teve de esperar mais de três mil anos até que Scipione Ferro resolvesse a equação do terceiro grau de Ludovico Ferrari, logo em seguida, a do quarto grau? Há também o lado humano, as figuras pitorescas e fascinantes dos homens envolvidos na descobertas e nas disputas daí decorrentes. Além disso, tem-se ainda o aspecto científico, os progressos matemáticos que advieram da solução e o grande problema geral da resolução por radicais, somente elucidado trezentos anos depois, por Ruffini, Abel e Galois. Tudo isto sem falar no cenário, aquela notável atmosfera de elevada excitação intelectual existente na Itália da época renascentista. (LIMA, 1987, P. 10)

Visto isso, é importante não só falar dos grandes matemáticos que contribuíram para a descoberta dos algoritmos de resolução dessas equações, mas dos diferentes métodos que surgiram bem como seu desenvolvimento e limites.

O ápice da resolução dessas equações ocorreu no Século XVI, mas, especialmente, cinco séculos anteriores essas mesmas equações já tinham sido também estudadas, em especial pela Matemática Árabe. Assim, objetivamos construir uma proposta de ensino fundamentado na História da Matemática a partir de uma breve discussão sobre o difundido conflito entre Girolamo Cardano (1501 - 1567) e Niccolo Tartaglia (1500 - 1557) na descoberta da resolução das equações cúbicas, bem como da história do poeta Omar Khayyan (1048 - 1083) e o seu curioso método geométrico para resolver uma equação da forma $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$.

METODOLOGIA

Este trabalho é derivado das atividades realizadas no Grupo PET-Matemática-UFCG, consistindo de uma pesquisa sobre o uso da História no Ensino de Matemática que partiu principalmente do artigo “Omar Khayyam’s Solution of Cubic Equations” de [SWETZ].

RESULTADOS E DISCUSSÃO

No século XVI, a autoria da resolução das equações cúbicas gerou um grande conflito entre os matemáticos Girolamo Cardano (1501 - 1567) e Niccolo Tartaglia (1500 - 1557). Pois, em 1545, Cardano publicou a primeira obra, conhecida por Ars Magna ([CARDANO]), cujo trecho encontra-se abaixo, na figura 1, que descrevia em forma de poesia os algoritmos para as resoluções de equações de terceiro e quarto grau. Porém, Niccolo Tartaglia também reivindicou esses algoritmos, afirmando que um dos métodos utilizado era de sua autoria, suscitando uma das primeiras brigas sobre autorias científicas da História. Maiores detalhes podem ser vistos em [GARI].

1. Quando o cubo com a coisa em apreço
   Se igualam a qualquer número discreto
   Acha dois outros diferentes nisso
2. Depois terás isto por consenso
   Que seu produto seja sempre igual
   Ao cubo do terço da coisa certo
3. Depois, o resíduo geral
   Das raízes cúbicas subtraídas
   Será tua coisa principal
4. Na segunda destas operações,
   Quando o cubo estiver sozinho
   Observarás estas outras reduções
5. Do número farás dois, de tal forma
   Que um e outro produzam exatamente
   O cubo da terça parte da coisa
6. Depois, por um preceito comum

Imagem 1: Trecho de (CARDANO, 1993).

Mas, cinco séculos antes de todo esse conflito, Omar Khayyan (1048 - 1083), matemático, poeta e astrônomo persa, famoso em sua época por ajustar o calendário persa com grande precisão e, mais tarde, no ocidente, conhecidíssimo em nosso tempo por sua poesia (das inúmeras traduções de sua poesia na diversas línguas, vide uma em português em [KAYYAN]), publicou em sua época uma obra intitulada “Tratado sobre Demonstrações de Álgebra”. Nela, consta uma curiosa resolução geométrica, para a equação cúbica

$$x^3 + b^2x + a^3 = cx^2,$$

que pode ser construída basicamente com régua não graduada e compasso e faz uso da interseção de uma hipérbole com um semicírculo. Essa demonstração, bem diferente das resoluções algébricas que são tratadas nas escolas e em nossos atuais compêndios, mostra-se mais elucidativa, podendo ser construída juntamente com os alunos. A demonstração é também um exemplo bastante didático e informativo da herança de como os gregos tratavam essas equações de modo puramente geométrico, modo esse, repassado e aprendido pelos árabes.

Problema: *Dados os segmentos de reta medindo a, b e c, construir um segmento de reta de comprimento x, com régua não graduada e compasso, de modo que satisfaça a igualdade:*

$$x^3 + b^2x + a^3 = cx^2.$$

Construção: Considere a figura 2, em que AB = a^3/b^2 (pode ser construído com a geometria grega), BC = c, EB = b e ED/BE = AB/BG.

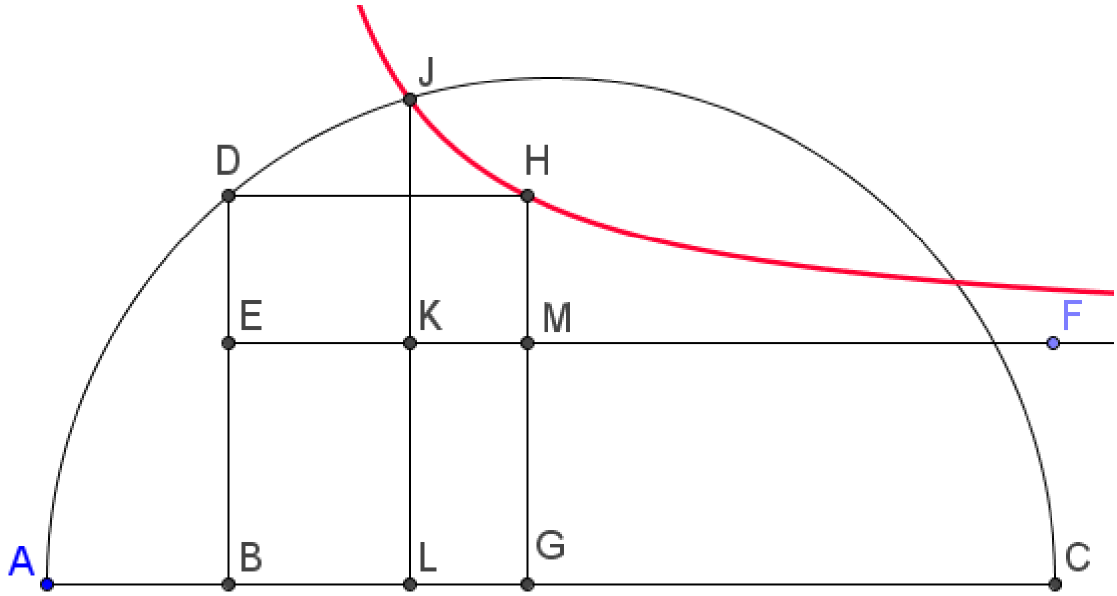

Figura 2: Intersecção entre o semicírculo e a hipérbole.

Demonstração:

1. J e H pertencem a hipérbole, assim EK.JK = EM.MH;
2. ED/BE = AB/BG implica ED. BG = AB.BE;
3. Substituindo BG por EM e ED por HM, e por 1 e 2 obtemos EK.KJ = BE.AB;
4. Ora, BL.LJ = EK.(LK + KJ) = EK.BE + BE.AB = BE.AL implica $BL^2.LJ^2=BE^2.AL^2$;
5. Pela geometria elementar, tem-se LJ^2 = AL.LC;
6. Então por 4 e 5, resulta em BL^2.LC = BE^2.AL => BL^2.(BC - BL) = BE^2.(BL+AB);
7. Com BL = x concluímos que
$$x^2(c-x) = b^2(x - a^3b^2) \Rightarrow x^3 + b^2x + a^3 = cx^2.$$

Podemos concluir que, no método utilizado por Omar Khayyam, é possível encontrar no máximo duas raízes reais positivas. Caso a equação tenha apenas uma raiz real positiva, a hipérbole se intersectará no ponto H com o semicírculo. Em relação à construção da hipérbole com régua e compasso, é possível construir ponto a ponto, em que podemos tomar N pertencente a EF e traçar um segmento NP, com P pertencente a hipérbole e NP perpendicular a EF. Logo, EM.MH = EM.NP.

CONCLUSÕES

Por fim, ao tratarmos da histórias das equações cúbicas é notório que a linguagem matemática na época se utilizava de poemas, como o da figura 1, além das demonstrações quando haviam eram de forma geométrica. Ademais, os matemáticos não costumavam compartilhar suas descobertas até publicá-las. Por fim, é importante enfatizar que ao chegar no algoritmo de resolução utilizado hoje em dia, foram necessários muito esforço e dedicação por parte dos estudiosos, atitudes estas que devem ser adotadas por todos os alunos e professores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARDANO, G.. *Ars magna or The Rules of Algebra*. Dover, 1993.

GARI, G. G.. *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo: Livraria de Física, 2006.

LIMA, E. L.. *A equação do Terceiro Grau.* Matemática Universitária, 1987. p. 9-23.

MENDES, I. A.. *Matemática e investigação em sala de aula*. São Paulo: Livraria de Física, 2009.

MENDES, I. A.; SILVA, C. M.. *Publicações sobre História da Matemática*. São Paulo: Livraria de Física, 2013.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC, 2006.

SWETZ, F. J.. *From five fingers to infinity: a journey through the history of mathematics.* Chicago: Open Court Publishing Company, 1994.

KAYYAN, O.. *Rubáiyát de Omar Kayahh*. Tradução por Otávio Tarquinio de Sousa. 15º Ed.. Rio de Janeiro: José Olympio, 1979.