

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE UMA CAMADA DE ESPONJA PARA CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO REFLEXIVAS

Autor Maurício Soares de Almeida¹

Orientador Murilo Pereira de Almeida²

¹Universidade Federal do Ceará, mauricio.almeida@fisica.ufc.br

²Universidade Federal do Ceará, murilo@fisica.ufc.br

Resumo do artigo: É de grande interesse implementar condições de contorno não reflexivas em problemas de matemática, física, engenharia, geofísica, etc. Com base nessa necessidade, foi simulado a propagação de uma onda em um meio bidimensional e criada uma região de esponja para absorver a solução próxima do limite computacional. A criação desse tipo de região consiste em demarcar uma porção do domínio para que a equação a ser solucionada tenha um parâmetro α maior, que será multiplicado pela velocidade de propagação da onda, capaz de amortecer o deslocamento com o passar do tempo. Foram testados quatro tipos de parâmetros: constante, linear, quadrático e exponencial. Para cada um deles foram realizadas três simulações modificando o tamanho da camada de esponja. Foram utilizadas camadas que correspondiam a um terço, um meio e dois terços da área do domínio computacional. De uma maneira geral, os resultados apresentaram boa concordância entre a solução analítica e a solução numérica. Verificou-se que a maior eficiência para grandes camadas é encontrada com o parâmetro exponencial enquanto que para pequenas regiões de esponja (com 1/3 do domínio computacional) o melhor resultado é obtido com o parâmetro quadrático. Em todos os casos foi calculado o erro através da norma L^2 e o erro máximo, obtido através da diferença em todos os pontos da malha entre a solução analítica e a numérica. O método mostrou ser eficiente podendo ser aplicado para os casos onde se deseja uma implementação fácil de condições de contorno não reflexivas, em troca do aumento do domínio computacional. A implementação foi feita em linguagem de programação Python, utilizando o método dos elementos finitos.

Palavras-chave: Camada de esponja, Elementos Finitos, Ondas.

Introdução

O estudo da propagação de ondas em meios materiais é comum em física e dele resultaram diversas aplicações tecnológicas relevantes tais como a ultrassonografia, usada em medicina e ciências de materiais, o imageamento sísmico para identificação, localização e prospecção de reservas minerais, vibrações geradas pelo tráfego urbano, estudo de terremotos, etc.

É comum em aplicações de física, geofísica e engenharia, que modelam grandes regiões, como a Terra, os oceanos e estruturas arquitetônicas, estudar a propagação de ondas em um meio infinito. Entretanto, criar computacionalmente tal meio, para que a solução se propague livremente, é impossível. Para contornar esse obstáculo, utiliza-se o método do truncamento, que discretiza o domínio em uma região finita e impõe em suas fronteiras condições de contorno que eliminem ao máximo as reflexões da solução para dentro do domínio, aproximando dessa forma a solução do problema ao caso do meio infinito.

As condições de contorno capazes de realizar esse feito são comumente chamadas de *Absorbing Boundary Condition* (ABC). Caso

(83) 3322.3222

contato@joinbr.com.br

www.joinbr.com.br

nenhuma delas seja utilizadas, faz-se necessário a criação de um domínio grande o suficiente para que as instabilidades numéricas e as soluções demorem tempo o suficiente para chegarem nas fronteiras, serem refletidas e não alterarem a solução do problema na região de análise. Tal opção torna-se inviável para grandes partes dos problemas reais, por aumentar de forma considerável o custo computacional.

Existem várias técnicas que tentam implementar condições de contorno não reflexivas no domínio. Lysmer e Kuhlemeyer (1969) propuseram a condição de contorno viscoso, que pode ser feita utilizando o Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM) fazendo uma pequena modificação na matriz de amortecimento, capaz de anular as tensões das ondas refletidas. Devido a sua simples implementação e eficiência computacional, tornou-se um dos métodos mais populares, sendo comum ainda ver sua utilização em casos específicos. A principal desvantagem do método é que a eficácia de absorção depende do ângulo de incidência das ondas.

Trabalhando inicialmente com as equações de Maxwell, Berenger (1994) formulou a chamada *Perfect Matched Layer* (PML) que, ao contrário das tentativas anteriores onde se procurava uma condição de contorno absorvente, consiste em uma camada limite absorvente adicionada aos limites do domínio. Sendo assim, quando uma onda entra nessa camada, ela é atenuada e decai exponencialmente. Dessa forma, Berenger eliminou o problema da limitação do ângulo de incidência da onda. Essa mesma ideia também foi aplicada em outros tipos de ondas, como as existentes em problemas de elastodinâmica, Helmholtz e poroelasticidade (Chew and Liu, 1996; Zeng and Liu, 2001). Esse método é largamente empregado utilizando diferenças finitas e elementos finitos pois apresenta bons resultados inclusive na absorção de ondas Rayleigh, onde os muitos métodos clássicos não funcionam bem (Festa and Nielsen, 2003).

Uma formulação uniaxial de PML foi desenvolvida por Gedney (1996), comumente chamada de UPML, em que o PML é descrito como um material absorvente anisotrópico artificial. Em particular, esse tipo de método consiste na transformação de coordenadas em que uma (ou mais) coordenadas são mapeadas para números complexos; mais tecnicamente, esta é, na verdade, uma continuação analítica da equação de ondas em coordenadas complexas, substituindo as ondas de propagação (oscilantes) por ondas exponencialmente decedentes.

Outro artifício que pode ser empregado é o das camadas de esponja (*Sponge Layer*). Nesse método, uma região de amortecimento de ondas

(camada de esponja) é criada com o objetivo de promover a atenuação da solução antes que ela atinja a região de fronteira. Essa camada tem início dentro do domínio computacional. A dissipação se dá pela adição de um termo de amortecimento as equações do problema, reduzindo dessa forma o seu potencial de reflexão. Comparado com as PML's, são consideravelmente mais fáceis de ser implementados e apresentam bons resultados para problemas de geometria simples (Tarplett, 2014; Kam, 2007).

O presente trabalho mostra a criação de uma camada de esponja, em um domínio regular, para simular a propagação de uma onda bidimensional em um meio infinito. O código foi implementado em linguagem Python, através da ferramenta computacional FEniCS, que automatiza a solução de equações diferenciais utilizando o FEM.

Metodologia

Quando se está resolvendo um problema numérico através do FEM, é de extrema importância que se especifique as condições de contorno essenciais que por ventura existam, caso contrário será aplicado, automaticamente, condições de contorno natural, por padrão. Por esse motivo que há dificuldade caso alguém queira que a solução flua para fora do domínio. Para impedir que haja reflexões nas fronteiras do domínio, utilizaremos uma camada de esponja inserindo um fator de amortecimento b na equação diferencial, dependente da velocidade da onda, da seguinte forma:

$$b = f \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

onde u é o deslocamento da onda. Consideramos f como quatro possibilidades distintas: sendo uma constante, uma função linear, uma função quadrática e uma função exponencial.

Para a realização das simulações foi criado um domínio retangular Ω , de dimensões $[0, L] \times [0, H]$. Em seguida, dividiu-se esse domínio em dois subdomínios, Ω_1 e Ω_2 , na linha vertical que passa pelo ponto $x = x_s$, sendo $0 < x_s < L$, e definiu-se como sendo camada de esponja a região $x \geq x_s$, conforme representado na Fig 1. A simulação consistiu na propagação de ondas para a camada de esponja, a fim de medir a capacidade de absorção que ela apresentava.

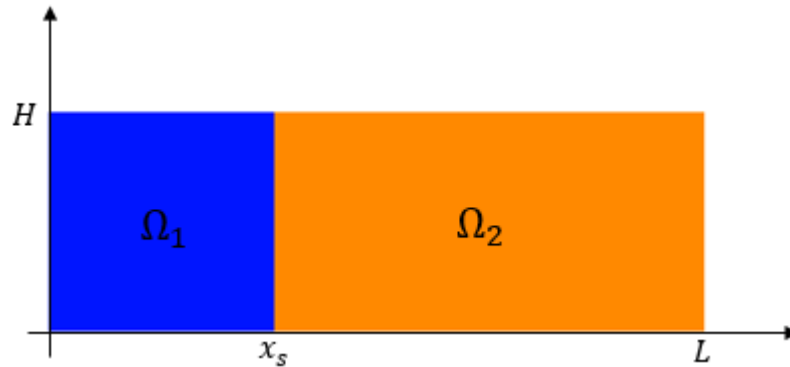


Figura 1 - Camada de esponja

O problema de Ω_1 será descrito pela equação da onda bidimensional, com velocidade de propagação c_1 ,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla^2 u_1 \quad x \in (0, x_s) \quad (2)$$

já em Ω_2 , será adicionado o fator de amortecimento a equação da onda:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + b \frac{\partial u_2}{\partial t} = c_2^2 \nabla^2 u_2 \quad x \in (x_s, L) \quad (3)$$

As seguintes condições de contorno foram adotadas nas simulações:

$$u(0, y, t) = U(y, t) \quad 0 \leq y \leq H, t \geq 0$$

$$\frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0$$

$$\frac{\partial u(x, H, t)}{\partial y} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0$$

$$\frac{\partial u(L, y, t)}{\partial x} = 0 \quad 0 \leq y \leq H, t \geq 0$$

A solução analítica do problema é conhecida e tem a seguinte forma:

$$u(x, y, t) = A \sin(\omega t - kx) \cos(ly) \quad (4)$$

com a velocidade da onda dada por

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2 + l^2} \quad (5)$$

Para transformar a Equação Diferencial Parcial (EDP) em um problema variacional, basta multiplicá-la por uma função v , integrar a equação resultante sobre o domínio e realizar a integração por partes dos termos com derivadas de

segunda ordem. Essa função que multiplica a EDP é chamada de *test function*. A função desconhecida u que será aproximada é chamada de *trial function*. As funções *test* e *trial* pertencem a certos espaços de função que especificam suas propriedades. Sendo assim, o problema variacional de (2), é dado por

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} v dx = \int_{\Omega_1} (c_1^2 \nabla^2 u_1) v dx \quad (6)$$

onde dx é o elemento diferencial para integração sobre o domínio Ω_1 . Aplicando integração por partes e utilizando o teorema da divergência, chega-se a

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} v dx = -c_1^2 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial n} v ds \quad (7)$$

sendo $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ a derivada de u_1 na direção normal n do contorno, que deverá ser zero, devido as condições de contorno do problema em análise, resultando em

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} v dx + c_1^2 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v dx = 0 \quad (8)$$

Analogamente, obtém-se o problema variacional de (3),

$$\int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} v dx + b \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial t} dx + c_2^2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \nabla v dx = 0 \quad (9)$$

O método de integração numérica utilizado foi o de Newmark, onde as relações entre deslocamento, velocidade e aceleração em t_n e t_{n+1} (que corresponde a $t_n + \Delta t$) são:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (2\beta \ddot{u}_n + (1 - 2\beta) \ddot{u}_{n+1}) \quad (10)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t \ddot{u}_n + \Delta t (\gamma \ddot{u}_{n+1} + (1 - \gamma) \ddot{u}_n) \quad (11)$$

onde $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$, promovendo um esquema trapezoidal. Reorganizando (10) e usando (11), chega-se a

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (u_{n+1} - u_n - \Delta t \dot{u}_n) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_n \quad (12)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (u_{n+1} - u_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{u}_n - \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_n \quad (13)$$

em que u_{n+1} é o termo desconhecido do lado direito.

O erro foi calculado de duas maneiras diferentes. Primeiro, através norma L^2 , definida por

$$E = \sqrt{\int_{\Omega} (u_{exato} - u)^2 dx} \quad (14)$$

onde u_{exato} corresponde a solução analítica do problema e, depois, pegando os valores de u e u_{exato} em todos os pontos da malha de elementos finitos e subtraindo-os (Erro máx).

Para verificar a influência do tamanho da camada de esponja na solução, foram criadas três malhas, de dimensões espaciais $\Delta x = 90$ e $\Delta y = 30$, com diferentes tamanhos de Ω_2 , conforme representado na Tabela 1. Em cada malha foram realizadas quatro simulações onde foi alterado o fator f da seguinte maneira:

Constante $f = 5$ (15)

Linear $f(x) = 10(x - x_s)$ (16)

Quadrática $f(x) = 10(x^2 - xx_s + x_s^2)$ (17)

Exponencial $f(x) = 5(e^{(x-x_s)} - 1)$ (18)

os parâmetros foram ajustados de forma a obter a melhor solução para cada caso.

Tabela 1 - Camada de esponja

| | Malha 1 | Malha 2 | Malha 3 |
|-------|---------|---------|---------|
| L | 3.0 | 3.0 | 3.0 |
| H | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| x_s | 1.0 | 1.5 | 2.0 |

Os resultados são referentes ao tempo final da simulação de 10s com passo incremental de 0.01s.

Resultados e Discussão

Uma simulação sem a camada de esponja foi realizada para mostrar as interferências geradas devido as reflexões ocorridas nas condições de contorno (Figura 2). Para este caso foi possível verificar a presença de ondas estacionárias.

A Figura 3 mostra o comparativo da solução numérica para cada tipo de função f no instante de tempo $t = 10s$. A camada de esponja

compreendia o intervalo de $1.5 < x_s \leq L$, compreendendo a metade do domínio computacional.

A Tabela 2 apresenta os erros encontrados de cada método quando comparado com a solução analítica do problema.

Tabela 2 - Erro da solução numérica

| | <i>f constante</i> | <i>f linear</i> | <i>f quadrática</i> | <i>f exponencial</i> | x_s |
|------------|--------------------|-----------------|---------------------|----------------------|-------|
| Erro L^2 | 0,070391467 | 0,04889509 | 0,107188933 | 0,036555891 | 1,0 |
| Erro máx | 0,151637666 | 0,15783849 | 0,085114072 | 0,107188933 | 1,0 |
| Erro L^2 | 0,209112268 | 0,06106828 | 0,082020246 | 0,069820809 | 1,5 |
| Erro máx | 0,389774551 | 0,18046663 | 0,226668533 | 0,20135773 | 1,5 |
| Erro L^2 | 0,211513024 | 0,06904839 | 0,083056819 | 0,070493741 | 2,0 |
| Erro máx | 0,396241967 | 0,20466974 | 0,247532249 | 0,229604963 | 2,0 |

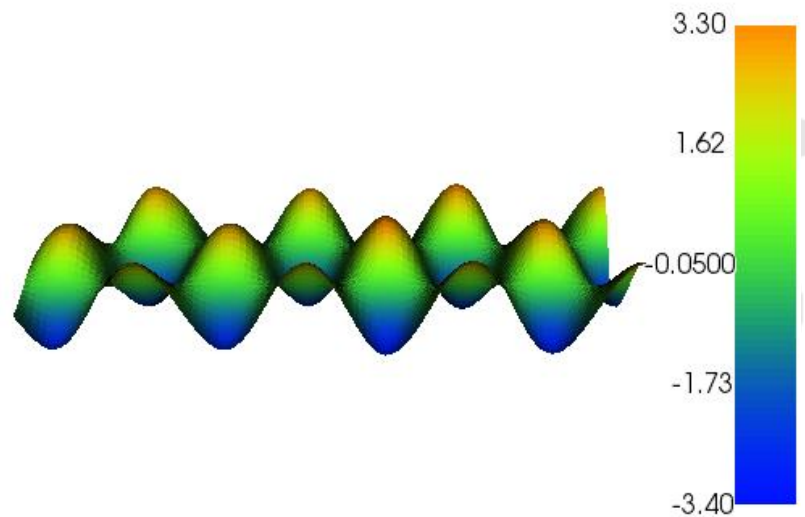


Figura 2 - Solução numérica sem a camada de esponja no instante $t=10s$

Para menores tamanhos na camada de esponja a utilização de uma função f quadrática mostrou maior eficiência seguida da exponencial.

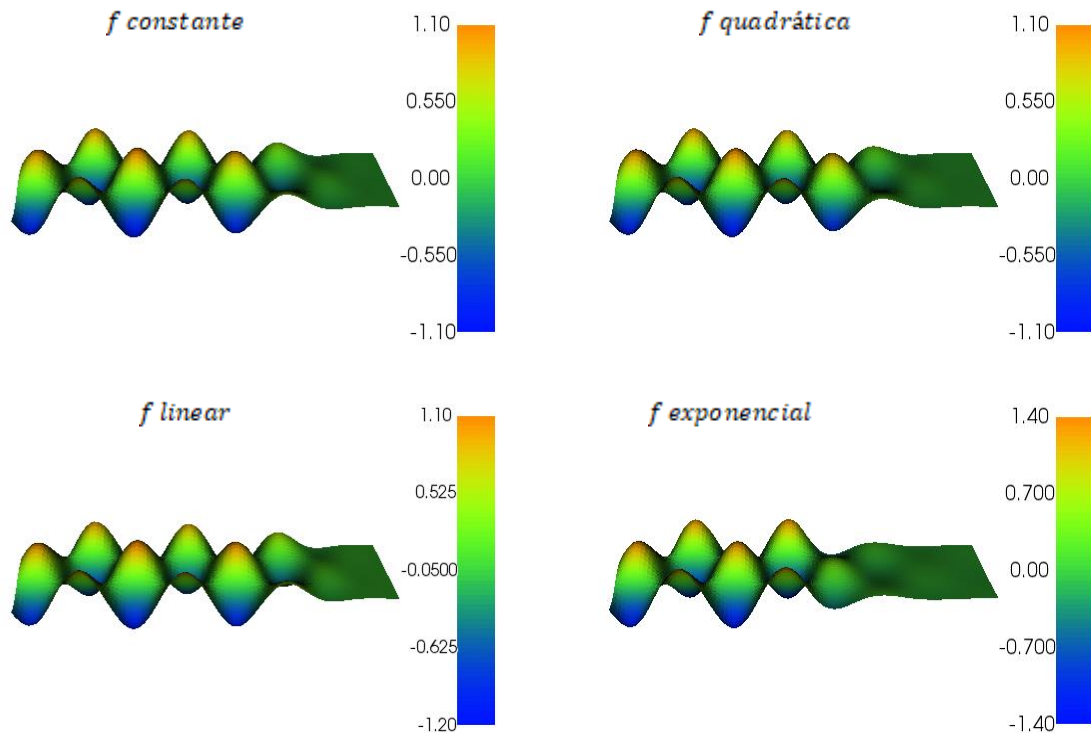


Figura 3 - Solução numérica no instante $t=10s$.

Conforme é possível observar, a onda sofre uma atenuação antes de chegar no limite direito do domínio, mostrando a eficiência do método. Em todos os casos foi possível constatar uma pequena parcela de reflexão durante a mudança de domínio.

Conclusão

A implementação de condições de contorno não reflexivas é de grande importância em simulação numérica computacional, devido a necessidade existente nos mais diversos tipos de problemas físicos.

Vários modelos foram criados nas últimas décadas capazes de proporcionar uma solução eficiente. Boa parte deles necessitam de modificações nas equações constituintes do problema, tornando-os não intuitivos.

O modelo proposto nesse trabalho tem como principal característica a fácil e rápida implementação, podendo ser implementado nos casos

onde ter uma grande região de esponja (entre $2/3$ ou $1/2$) do domínio não é um problema.

Os resultados obtidos mostraram boa concordância entre a solução analítica e a solução numérica.

Foram testados quatro parâmetros de amortecimento dependentes da velocidade: linear, constante, quadrático e exponencial. Os resultados mostraram que o menos eficiente é o constante.

Para o caso onde a região de esponja corresponde a $2/3$ do domínio, a maior eficiência ocorre para o parâmetro exponencial, enquanto para uma esponja menor, com $1/3$ do domínio, a maior eficiência se mostra quando esse parâmetro é quadrático. O parâmetro linear apresentou desempenho intermediário experimentos realizados.

Referências

Berenger, Jean-Pierre. "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves." *Journal of computational physics* 114.2 (1994): 185-200.

Chew, W. C., and Q. H. Liu. "Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition." *Journal of Computational Acoustics* 4.04 (1996): 341-359.

Festa, G., and S. Nielsen. "PML absorbing boundaries." *Bulletin of the Seismological Society of America* 93.2 (2003): 891-903.

Gedney, Stephen D. "An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices." *IEEE transactions on Antennas and Propagation* 44.12 (1996): 1630-1639.

Kam, E. W. S., R. M. C. So, and R. C. K. Leung. "Lattice Boltzmann method simulation of aeroacoustics and nonreflecting boundary conditions." *AIAA journal* 45.7 (2007): 1703.

Lysmer, John, and Roger L. Kuhlemeyer. "Finite dynamic model for infinite media." *Journal of the Engineering Mechanics Division* 95.4 (1969): 859-878.

Tarplett, Daniel J. "Numerical analysis of the seismic wave equation in different layers by the finite element method using fenics". 2014. 62f. Tese (Master of Science), Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Oslo, 2014.

Zeng, Yan Qing, and Qing Huo Liu. "A staggered-grid finite-difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations." *The Journal of the Acoustical Society of*

America 109.6 (2001): 2571-2580.

