



## **ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS**

Jefferson Dagmar Pessoa Brandão  
*Instituto Federal da Paraíba – IFPB*  
*Jefferson.brandao@ifpb.edu.br*

A pesquisa tem como objetivo analisar as dificuldades e possibilidades da metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas aliada ao trabalho com as representações múltiplas para a formação do conceito de função, em sala de aula. Tomam-se com base as cinco grandes ideias essenciais para conceito de função propostas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Faz-se também uma revisão bibliográfica de algumas pesquisas nacionais que abordaram como tema o conceito de função, o olhar se volta para aquelas que possuem correlação com a nossa pesquisa, a fim de compreender o que essas pesquisas tratam sobre o tema função. O trabalho em sala de aula optou-se por utilizar a resolução, proposição e exploração de problemas, onde dedicamos algumas páginas do trabalho para discutir os seus aspectos. A metodologia de pesquisa é de cunho qualitativo, na modalidade de pesquisa pedagógica, na qual o professor pesquisa sua própria prática em sala de aula. A pesquisa foi aplicada em uma escola Pública da cidade de Lagoa Seca, PB, com uma turma de primeiro ano do Ensino Médio. Dentre os resultados detectados, o trabalho com as diferentes representações de funções fez com que se percebesse que os alunos conseguiram ver mais detalhes do conceito de função permitindo uma compreensão mais consistente; se observou que o uso da metodologia de resolução de problemas permitiu que os alunos se envolvessem com as atividades e se sentissem mais motivados a estudar o conteúdo.

**Palavras Chaves:** Resolução de problemas, Função, Representações, Pesquisa Pedagógica.

### **INTRODUÇÃO**

O conceito de função é considerado como um dos mais importantes da Matemática e apresenta uma grande aplicabilidade, desta forma, sua compreensão e formação pelo aluno são, portanto, fundamentais. Além disso, em termos curriculares, o conteúdo Funções é pré-requisito para o estudo de vários outros conteúdos do Ensino Médio, por exemplo, os conteúdos da Geometria, sem contar que em praticamente toda a vida estudantil o aluno tem contato, seja de forma intuitiva ou formal, com o conteúdo de função.

De um modo geral, o contato do aluno com esse conceito se dá por uma sequência que consiste, inicialmente, da apresentação da definição formal, seguida de exercícios resolvidos e exercícios propostos, primordialmente considerando a forma algébrica, apesar de existirem outras formas de representá-la, como tabelas, gráficos e outros. Este tipo de abordagem, a partir de nossa experiência em sala de aula, não gera no aluno a devida compreensão e o mesmo chega ao final do Ensino Médio sem saber o que é uma função.

Trabalhamos com a hipótese de que para o ensino aprendizagem de função ocorra de forma compreensiva pelo aluno, o mesmo deve, inicialmente, partir de uma forma mais intuitiva, considerando as ideias essenciais para este



conteúdo e fazer com que o aluno perceba as várias maneiras que podemos representar uma função.

Fizemos um levantamento de algumas pesquisas brasileiras que trataram do tema função, onde concentramos nosso olhar para seus objetivos, metodologias utilizadas e resultados encontrados. Das cinco pesquisas estudadas percebemos que os objetivos de quatro delas são voltados para dar significado para os alunos ao conceito de função, já a outra se preocupa a formação do professor que ensina função. Todas as pesquisas por nós analisadas optaram pela elaboração e aplicação de uma sequência didática ou experimentação didática. Entre as cinco pesquisas que utilizaram a sala de aula em suas pesquisas: quatro delas foram aplicadas no Ensino Médio e uma no Ensino Fundamental. Fica bem evidente nas pesquisas o trabalho com as representações múltiplas de função e com a ideia de covariação e taxa e variação.

Para realizarmos este estudo, nos apoiamos nas grandes ideias essenciais para a aquisição do conceito de função, destacadas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que apresentam cinco grandes focos, a saber: o conceito de função; covariação e taxa de variação; família de funções; combinação e transformação de funções e representações de funções.

Com relação às representações múltiplas, acreditamos que quando representamos uma função por meio de uma tabela, de um gráfico, de uma regra verbal e de uma expressão algébrica, fazendo com que essas representações se associem entre si, geramos uma compreensão mais abrangente do conceito.

Ao final do trabalho pretendemos responder a seguinte questão: quais as possíveis dificuldades e possibilidades da metodologia de resolução de problemas, aliada ao trabalho com as representações múltiplas para a formação do conceito de função, em sala de aula?

Consequentemente, o nosso objetivo foi identificar as dificuldades e possibilidades da utilização da metodologia de resolução de problemas e do uso das representações múltiplas, durante a formação do conceito de função.

## **METODOLOGIA**

A metodologia utilizada foi de cunho qualitativo, cuja modalidade, é a pesquisa pedagógica, onde o pesquisador pesquisa sua própria sala de aula. A metodologia escolhida para a aplicação das atividades em sala de aula foi a de resolução, proposição e exploração de problemas, desenvolvida com a aplicação de uma sequência de atividades em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio,

localizada na cidade de Lagoa Seca, interior da Paraíba.

A modalidade de pesquisa pedagógica envolve profissionais, no nosso caso professor pesquisando sua própria sala de aula. Segundo Lankshear e Knobel, (2008, p. 13-14) há dois aspectos que são consenso em relação à pesquisa pedagógica: “a pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula, o principal pesquisador em qualquer trabalho de pesquisa pedagógica é o professor cuja sala de aula está sob investigação”.

Formulamos e aplicamos atividades com a finalidade de fazer com que o aluno compreendesse o conceito de função e, desta forma, melhorasse no entendimento das famílias de função. As atividades faziam uso das representações verbal, tabular, algébrica e gráfica, sempre tentando fazer a articulação entre elas.

O trabalho de sala foi realizado, na maioria das vezes, em grupos de três alunos. Optamos por grupos por acreditarmos que tal situação favorece a interação, formulação e comunicação de estratégias entre os alunos. A escolha dos grupos ficou por conta dos próprios alunos, só interferíamos nos lugares onde deveriam ficar. Esses grupos podiam ser os mesmos em todas as aulas, mas os alunos poderiam mudar caso desejassem. Cada participante do grupo recebia uma cópia da atividade, a qual deveria devolver ao término da abordagem da referida atividade.

O professor-pesquisador assumiu o papel de mediador do processo, sempre colocando o aluno como agente ativo, protagonista da aula.

A intervenção foi desenvolvida no período de 08 de maio de 2013 a 29 de agosto de 2013. Cabe destacar que esta pesquisa foi desenvolvida em 23 encontros, geralmente de duas aulas de 40 minutos cada, com exceção de um encontro em que houve três aulas e do último, que foi apenas em uma aula. A turma nos foi cedida pelo professor titular da disciplina de Matemática da escola e a assumimos desde início do ano letivo. As aulas da turma ocorriam nas quartas e quintas feiras - nas quartas feiras 2º e 3º aulas, iniciando às 13h40minh e com término às 15h00min; e nas quintas feiras 5º e 6º aula, iniciando às 16h00min e terminando às 17h10min.

Os dados foram coletados em nossas aulas através de notas de aulas, análises das descrições das aulas e produções dos alunos. Tentamos, sempre que possível, trazer as falas dos alunos para as nossas descrições, porém, temos certeza que muitas falas foram perdidas, devido à impossibilidade de estarmos em todos os grupos ao mesmo tempo.



## RESULTADOS E DISCUSSÃO

### Ideias Essenciais do Conceito de função

O conceito de função é considerado como um dos mais importantes da Matemática e apresenta uma grande aplicabilidade. Desta forma, a compreensão e formação do conceito de função pelo aluno são, portanto, fundamentais. Além disso, em termos curriculares, o conteúdo funções é pré-requisito para o estudo de vários outros conteúdos do Ensino Médio.

A publicação de 2010 do NCTM - <sup>1</sup>Developing Essential Understanding of Functions Grades 9-12, dos autores Cooney, Beckmann e Lloyd, apresenta o que os autores consideram como sendo as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função. Para eles há outras inúmeras ideias importantes no conceito de função, mas como ideia essencial, para as series equivalentes, no Brasil, do nono ano do Ensino Fundamental ao terceiro ano do Ensino Médio, destaca: O conceito de função; Covariação e taxa de variação; Família de funções; Combinação e transformação de funções e Representações de funções. Cada grande ideia dessas é subdividida em ideias mais específicas, as quais, no livro, os autores chamam de entendimentos essenciais, na literatura internacional é o que encontramos de mais atualizado, quando se trata do conceito de função.

A primeira grande ideia considerada essencial é o conceito de função.

O conceito de funções é intencionalmente largo e flexível, permitindo que seja aplicável a uma ampla variedade de situações. A noção de função abrange muitos tipos de entidades matemáticas, além de funções "clássicas" que descrevem quantidades que variam continuamente. Por exemplo, as matrizes e as sequências aritméticas e geométricas podem ser vistos como funções. (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 7).

A primeira grande ideia considerada como sendo essencial pelos autores nos faz refletir que o conceito de função é bastante pertinente para os alunos, pois o mesmo possui muitas aplicações, por ser um conceito amplo. As aplicações ocorrem tanto em contextos sociais como dentro da própria Matemática, como no caso das matrizes, das sequências e de vários conceitos geométricos (as fórmulas para calcular a área das figuras planas, entre outros); além de possuir aplicação em outras ciências como a Física (o cálculo feito para encontrar a velocidade média de um automóvel é dado através de uma função).

A grande ideia 2, considerada como sendo uma das essenciais, é denominada de covariação e taxa de variação.

Funções fornecem um meio para descrever como relacionam quantidades que variam juntas. Podemos classificar, prever e caracterizar vários tipos de relações, compreendendo como a taxa de variação varia com respeito a outra. (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p.7)

---

<sup>1</sup> Desenvolvendo as compreensões essenciais de funções do 9º ao 12º Ano.



Quando se trabalha numa perspectiva onde se analisa a covariação, é dada ênfase na mudança que ocorre entre as duas grandezas que estão variando juntas, não é dada tanta importância às regras que associam  $x$  a  $f(x)$ . Acreditamos que seja importante introduzir o conceito de função fazendo com que os alunos compreendam os conceitos de covariação e taxa de variação, mostrando como duas grandezas variam entre si.

Mais um ideia considerada essencial para o conceito de função é a grande ideia 3, que trata das famílias de funções.

As funções podem ser classificadas em diferentes famílias de funções, cada uma com suas próprias características únicas. Famílias diferentes podem ser usadas para modelar diferentes fenômenos do mundo real (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 7).

Dentro do conceito de função existem várias famílias e cada uma delas possui suas próprias características, sendo que as situações do mundo real vão ser modeladas tomando como referência uma das famílias, de acordo com a situação particular.

A grande ideia 4, oferece algumas discussões sobre combinação e transformação de funções.

As funções podem ser combinadas através da adição, subtração, multiplicação, divisão e da composição delas. Funções às vezes têm inversas. As funções podem ser analisadas muitas vezes, visualizando-os como sendo feitas a partir de outras funções. (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 7).

Dessa forma, as funções podem ser vistas de diferentes maneiras podendo facilitar o entendimento pelos alunos. Essa técnica é muito usada em toda a Matemática, onde desmontamos e analisamos, por partes, as funções. Estas por sua vez, podem ser combinadas, divididas e transformadas em várias formas diferentes, permitindo fazer uma análise mais detalhadas.

A grande ideia 5 explicita as representações múltiplas de funções.

Funções podem ser representadas de várias formas, incluindo a forma algébrica (simbólico), representações gráficas, verbais e tabulares. Ligações entre essas diferentes representações são importantes para estudar as relações e mudanças. (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 8).

Sobre a grande ideia 5 percebemos que cada uma das representações devem ser trabalhada em conjunto uma com a outra, não privilegiando uma única representação. Percebemos que muitas vezes o ensino de função na escola tem privilegiado as expressões algébricas em detrimento das outras representações, acarretando um ensino de procedimentos algorítmicos e não levando o aluno a compreender o conceito. Cada uma das representações é apenas uma maneira diferente de expressar funções, porém de grande importância, pois permite que o aluno desenvolva a compreensão completa desse importante conceito.



Na nossa pesquisa, as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, ajudaram a nos fundamentar e, a partir disto, percebemos detalhes importantes, a serem considerados, durante a intervenção com os alunos. Reforçamos o que percebíamos sobre a importância do conceito de função; vimos que é mais adequada para o nível da pesquisa a introdução do conceito de função, considerando os aspectos de covariação e taxa de variação; compreendemos que cada família de função tem sua devida aplicação para modelar uma situação cotidiana e que cada uma delas tem características próprias; ainda, fortalecemos a ideia de que quando fazemos algumas combinações nas funções pode-se facilitar o entendimento dos alunos; e por fim, as diferentes representações que uma função pode assumir, sem que se mude a função, faz com que a compreensão do conceito se torne mais amplo e adequado.

### **Resolução, Proposição e Exploração de Problemas**

Uma das formas, que acreditamos que favoreça o aluno a aprender a aprender é a utilização da metodologia de ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Para Ronau, Meyer e Crites (2014) a abordagem de ensino através da resolução de problemas faz com que os alunos se tornem ativos no processo de aprendizagem e conseguem avaliar seu próprio trabalho. Diante disto, para a realização de nossa intervenção em sala de aula, fizemos a opção por esta metodologia, decorremos a seguir alguns aspectos sobre esta maneira de trabalhar o conteúdo matemático.

Destaca-se como início das pesquisas com resolução de problemas o trabalho de George Polya em seu livro “A arte de resolver problemas” (1994, 1ª ed. em 1945), onde propõe um método em quatro etapas para a resolução de problemas: 1º) compreender o problema, 2º) elaborar um plano, 3º) executar o plano, 4º) fazer o retrospecto ou verificação da solução do problema original. Cada uma dessas etapas se subdivide outras.

Na década de 80 o NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática), entidade norteamericana, apresentou um documento “An Agenda for Action” (Uma Agenda para Ação), que trazia que “a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar nesta década” (NCTM, 1980, p. 1). Só foi a partir dessa década que a resolução problema começou a ser destacada como uma metodologia de ensino.

A década de 90 foi considerada como sendo a mais produtiva em pesquisas sobre a metodologia de resolução de problema, no Brasil e no Mundo. Andrade (1998) afirma que a resolução de problemas é assumida como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática.





Desta forma que demos início a intervenção de nossa pesquisa, colocando para os alunos problemas antes mesmo de falar e expor para eles a formalização do conteúdo de função. Estes problemas continham um nível que eles eram capazes de resolver, mesmo sem ter visto nada de função, mas possuía as ideias essenciais para a compreensão do conceito.

As definições de Onuchic (1999), Dante (1988), Lester (1980) e dos PCN (1997b) para o que seja um problema matemático convergem, todas elas indicam que só temos um problema quando não temos a solução de imediato, muito embora, temos a vontade de encontra-la. Percebam que para determinado individuo determinada situação pode ou não, ser um problema, visto que para o individuo que já sabe o caminho para a resposta a situação configura-se em um exercício.

Ao fazer leituras sobre a metodologia de resolução de problemas, vamos perceber que existem diversas concepções, cada qual com sua contribuição, as quais vêm sendo aprimoradas a longo do tempo. Entretanto destacaremos as três concepções de Schroeder e Lester (1989, p. 31 – 34): ensinar sobre resolução de problemas; ensinar a resolver problemas; e ensinar matemática através da resolução de problemas.

A terceira concepção é que adotamos para nosso trabalho em sala de aula. Nesta concepção o problema matemático é tido como ponto de partida que leva o aluno a compreender o conteúdo, o ensino estar concentrado no aluno, ele é o protagonista, aonde vai construindo seu conhecimento do decorrer do processo de resolução do problema, cabendo ao professor mediar este processo e formalizar o conteúdo ao final.

Percebemos que esta terceira concepção apresenta a resolução como uma metodologia de ensino de Matemática, o qual nos apresenta um caminho para se ensinar Matemática e não apenas resolver problemas.

Outro aspecto que vale a pena citarmos aqui e que acreditamos que possa levar o aluno a compreender o conteúdo é a exploração de problemas. Segundo Andrade (1998) durante o trabalho com a exploração de problemas inicialmente é dado o problema para os alunos, que realizam o trabalho sobre ele, seguidamente o aluno junto com o professor discutem o trabalho que aluno fez em um processo de reflexão, podendo a partir desta chegar à solução do problema, a despertar novos problemas, até resgatar novos conteúdos, levando a outras reflexões e sínteses. O autor constrói o seguinte esquema para caracterizar processo de exploração de um problema: Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS).

Em nosso trabalho em sala de aula percebemos que nossa pesquisa vai além da resolução de problemas matemáticos. Na metodologia de ensino aprendizagem de Matemática



através de resolução de problemas podemos destacar a proposição de problemas. Ernest (1996) considera a proposição de problemas como sendo essencial em sala de aula, em suas palavras: “A matemática escolar para todos deve estar relacionada com a formulação e resolução de problemas” (p. 28).

Pudemos ao longo de nossa intervenção levar nossos alunos a propor problemas. Acreditamos que quando o aluno formula seus próprios problemas, estamos trabalhando uma atividade matemática que faz o aluno pensar matematicamente.

Segundo English (1997) a proposição de problemas consiste na formulação de novos problemas que dizem respeito a uma situação particular, um conteúdo. Para o autor a proposição de problemas possibilita ao professor perceber como o aluno está compreendendo o conceito e processos matemáticos e ainda percebe como se encontra a criatividade do aluno.

### **Desenvolvimento das Atividades**

Durante a intervenção em sala de aula que totalizaram 23 encontros fizemos uma descrição detalhada e análise das atividades trabalhadas. Dividimos as atividades em quatro seções com o intuito de direcionar o leitor. Na primeira seção abordamos atividades com o objetivo de introduzir o conceito de função; a segunda seção trata da representação gráfica; na terceira, as atividades levaram a institucionalização (formalização) do conceito de função; e a última abordou uma das famílias de função - a Função Afim.

Selecionamos um encontro como uma amostra de um recorte de nossa intervenção que venha a ser representativo deste trabalho.

#### **2º Encontro (Duas Aulas) - Dia 09/05/2013**

A aula foi iniciada pedindo aos alunos que se dividissem em grupos de três pessoas, que poderiam ser os mesmos da última atividade, mas não tinha problema se quisessem permutar.

Foi entregue o roteiro da Atividade 2 e solicitado que eles lessem o enunciado da questão e tentassem resolvê-la.

<sup>2</sup>*Atividade 2 – O preço da passagem de ônibus: O preço da passagem de ônibus entre as cidades de Lagoa Seca e Campina Grande é R\$ 2,25. Com base nesse dado, construa uma tabela, relacionando o valor a ser pago com o número de passagens. Agora responda as seguintes questões:*

- a) Quanto uma pessoa pagaria por dia se morasse em Lagoa Seca e trabalhasse em Campina Grande? E em uma semana? E em um mês?*
- b) É possível saber a quantidade de passagens pagas, se o valor total pago corresponde a R\$ 54,00?*
- c) Quais as grandezas envolvidas nessa situação?*

---

<sup>2</sup> Atividade formulada pelo pesquisador





d) *É possível estabelecer uma relação matemática que possa expressar essa situação? Qual?*

e) *Em sua opinião, o preço da passagem de ônibus entre Lagoa Seca e Campina Grande é justa? Por quê?*

A atividade tinha como objetivo fazer com que os alunos construíssem uma tabela que relacionasse as grandezas envolvidas na situação, dessa forma se familiarizando com aspectos de correspondência e relação. Na atividade foi trabalhada as representações tabular, algébrica e verbal.

Logo quando entregamos o roteiro da atividade aos alunos, começaram a fazer questionamentos.

Percebemos que os alunos sentem certa insegurança em realizar o que se pede sozinho, para itens claros e fáceis, como no caso quando se pede para construir uma tabela, os alunos ainda ficam inseguros e perguntam como fazer. Portanto, há uma forte dependência dos alunos para com o professor, eles perguntam como proceder a cada passo. Eles tinham dificuldades de ir adiante na resolução da atividade sem que houvesse consulta ou afirmação do professor. Notamos nisso uma falta de um pensar metacognitivo. Sobre essa insegurança Chevallard, Bosch e Gascón (2001) tratam “[...] os alunos tendem a delegar ao professor a responsabilidade de suas respostas, como se não importasse a eles o fato de serem verdadeiras ou falsas; como se o único objetivo de sua atuação fosse responder as perguntas do professor [...]”.

Esta atividade gerou varias discussões, como por exemplo, os alunos questionaram quantos dias da semana a pessoa da situação trabalhava. Notamos grande envolvimento dos alunos nas discussões que o problema gerou. Quando se trabalha com problemas que fazem parte do cotidiano dos alunos, os mesmos se sentem mais envolvidos e participativos, provocando neste caso autonomia.

Nesta atividade os alunos perceberam que uma mesma situação pode possuir mais de uma representação, pois nela pudemos trabalhar com as representações tabular, algébrica e verbal. Há uma facilidade de desenvolver a grande ideia 5 de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) sobre as representações de funções. Percebemos, que apesar de os alunos não fazerem a representação da forma considerada mais adequada, eles compreenderam a importância que a taxa de variação tem para a construção do modelo - desenvolvimento da grande ideia 2, sobre a covariação e taxa de variação

Os estudantes puderam dar suas opiniões com respeito a uma temática de interesse local, gerando dessa forma julgamento critico da



situação, o que percebemos nas respostas do que achavam sobre o preço da passagem de ônibus entre Lagoa Seca e Campina Grande.

## CONCLUSÃO

O caminho que trilhamos nos faz acreditar que o nosso objetivo foi alcançado, uma vez que os alunos aceitaram bem a proposta da nova metodologia. Acreditamos que a resolução de problemas fez com que os alunos compreendessem melhor o conteúdo de função, e, portanto esta metodologia contribuiu significativamente para o ensino do professor e aprendizagem do aluno, referente ao conceito em estudo.

Com relação às representações múltiplas de funções, notamos que os alunos identificam com facilidade a representação verbal das situações e obtém os valores da variável dependente e independente usando esta representação. O uso da representação verbal e tabular o ajuda para fazer a passagem para a representação algébrica. Mas, de modo geral as representações eram na maioria das vezes mediadas pela representação tabular, uma vez que usavam a tabela para intermediar a representação algébrica e gráfica, isto mostra dependência dos alunos a esta representação.

Com relação ao que Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) consideram como as grandes ideias essenciais do conceito de Função, percebemos que tenha ficado claro para os alunos: a grande aplicabilidade do conceito de função; a percepção de que quando o valor de uma variável mudava ocorria o mesmo com a outra e; tiveram a oportunidade de perceber que uma função pode ser representada de maneiras distintas, sem deixar de ser a mesma função.

Pudemos realizar um estudo em torno do tema função, o qual permitiu que elaborássemos e aplicássemos uma sequência de atividade em sala de aula, desta forma fornecemos uma maneira de introduzir o conceito de função através de problemas que geram as discussões sobre as ideias essenciais do conteúdo, sem que seja necessário, de início, já apresentar as definições formais e que devem ser construídas pelos alunos durante o processo em sala aula. Não fornecemos apenas a sugestão para o desenvolvimento do conceito de função, mas também a discussão dos resultados da utilização deste em sala de aula.

## REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: IGCE, UNESP, 1998.



BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CONNAY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. et al. **Developing an essential understanding of functions: fo teching mathematics in grades 9-12**. Reston: NCTM, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática**. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Tese de Livre Docência, 1988.

ENGLISH, L. D. **The development of fifth-grade children's problem-posing abilities**. Educational Studies in Mathematics, v. 34, n. 3, p. 183-217, 1997.

ERNEST, P. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: ABRANTES, P; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. **Investigar para aprender Matemática (textos selecionados)**. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 1996. p. 25-48.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa Pedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LESTER, F. K. Research in mathematics problem solving. In: Shumway, R. J. (Ed.). **Research in mathematics education**. Reston: NCTM, 1980. p.286-323.

NCTM. **An agenda for action**. Reston: NCTM, 1980.

ONUCHIC, L. R. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RONAU, R. N.; MEYER, D.; CRITES, T. **Putting Essential Understanding of Functions into Practice in Grades 9–12**. Reston: NCTM, 2014.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementar school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-32.