DOI: 10.46943/IX.CONEDU.2023.GT13.012

CATENÁRIA: A CORDA BAMBA DA MATEMÁTICA E SUAS APLICAÇÕES

JOSEFA ITAILMA DA ROCHA
Professora: Doutora, Universidade Federal de Campina – UFCG, e tutora do Programa de Educação Tutorial (PET) – Matemática e Estatística, itailma@mat.ufcg.edu.br;

CELINE INGRID GOMES DOS SANTOS
Graduanda do Curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, e integrante do Programa de Educação Tutorial (PET) – Matemática e Estatística, celineingridgomess@hotmail.com;

LARYSSA KELY ALVES RODRIGUES
Graduanda do Curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, e integrante do Programa de Educação Tutorial (PET) – Matemática e Estatística, lkellyalves@hotmail.com.

RESUMO

A catenária (derivada do latim, ***catena***, que significa “corrente”) é uma curva obtida a partir da suspensão de uma corda por dois pontos, sob a influência da gravidade. Por muito tempo, essa representação geométrica confundiu os matemáticos, devido à sua semelhança com a parábola. Os estudos acerca da catenária iniciaram-se com o matemático Galileu Galilei (1564-1624), que propôs que uma corrente suspensa fixada por dois pontos sujeita à ação da gravidade gera uma parábola. Entretanto, muitos anos depois, Christiaan Huygens (1629-1695) revelou que essa curva, em verdade, não é uma parábola. A partir dessa descoberta, os matemáticos dedicaram-se ao estudo dessa curva. A catenária tem diversas aplicações, como na construção de pontes, na distribuição de cargas e na construção de linhas de transmissão elétrica. Dessa forma, neste trabalho, objetivamos apresentar a catenária, apontando suas diferenças em relação à parábola e mostrar algumas de suas aplicações, principalmente na Engenharia e Arquitetura. Para isso, a metodologia utilizada para a construção desse trabalho foi a pesquisa bibliográfica, em revistas de educação matemática, dissertações de mestrado e teses de doutorado. Por último, pretendemos garantir que, ao usar essa abordagem em sala de aula, os alunos sejam capazes de perceber a presença dessa curva no cotidiano, evitando situações de confusões com a parábola. Em vista do que fora exposto, essa abordagem pode ser usada como forma de curiosidade para, então, despertar o interesse dos alunos em relação à Matemática.

Palavras-chave: Catenária, Parábola, Curva, História da Matemática, Aplicações.

ISBN: 978-85-61702-77-9

INTRODUÇÃO

A catenária – curva suspensa entre dois pontos sob a influência da gravidade – por muito tempo, confundiu os matemáticos por sua semelhança com a parábola. Esse nome, batizado pelo matemático por Gottfried Leibniz (1646-1716) tem origem do latim, ***catena,*** que significa corrente.

Mesmo após anos de estudos e descobertas que atestam a veracidade de que ambas são diferentes, ainda há uma quantidade significativa de pessoas que não reconhecem a catenária ou confundem as duas curvas, devido às suas semelhanças geométricas. Essa falta de discernimento pode ser causada pelo fato de que apenas a parábola é estudada nas escolas, fazendo com que os estudantes acreditem que todas as curvas naquele formato são uma parábola.

É comum encontrar, em nosso cotidiano, as duas curvas. Por exemplo, a catenária pode ser observada em estruturas como pontes, esculturas, obras arquitetônicas, nas Igrejas, cabos de energias pendurados em postes e entre outros. Por outro lado, a parábola é identificada nas antenas parabólicas, em construções de prédios e, de acordo com Cerqueira (2015), em faróis de carros, holofotes e lanternas. Dessa forma, por serem tão presentes, podem ser, de fato, confundidas.

Nessa perspectiva, apresentaremos a curva catenária, iniciando com um breve contexto histórico, definições e algumas de suas aplicações presentes no cotidiano, por meio da engenharia e arquitetura. Consoante a isso, abordaremos, a diferença entre a parábola e a catenária, além de algumas curiosidades, com o objetivo de evitar possíveis equívocos entre essas duas curvas tão notáveis. Por último, iremos propor uma atividade para ser aplicada em sala de aula, em que os conceitos vistos poderão ser exercitados.

METODOLOGIA

O presente trabalho fora desenvolvido a partir de uma orientação vinculada ao Programa de Educação Tutorial (PET) – Matemática e Estatística, da Universidade Federal de Campina Grande, e financiado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

A priori, a motivação para o desenvolvimento deste trabalho fora apresentar as principais diferenças entre as curvas parábola e catenária, e mostrar algumas aplicações dessa última à Engenharia e Arquitetura, principalmente. Para isso, procuramos abordar o tema de maneira clara, fazendo uma análise minuciosa das obras dispostas nas referências, por meio da pesquisa bibliográfica. Cabe ainda destacar que, para estudo do tema e produção deste trabalho, foram utilizados artigos de periódicos online e dissertações de programas de mestrado em Matemática.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

UM POUCO DE HISTÓRIA

Inicialmente, o famoso matemático, físico e astrônomo Galileu Galilei (1564-1624), tentou descrever a catenária. Em seus estudos, ele afirmou que essa representação geométrica seria uma aproximação da parábola. Porém, Christiaan Huygens (1629-1695) em 1646 afirmou que Galileu estava errado. Entretanto, não definiu qual curva a representa. De acordo com Eves (2004, p. 399), Huygens definiu a catenária da seguinte maneira: “curva assumida por uma corrente perfeitamente flexível e inextensível, de densidade linear uniforme, pendurada em dois ganchos não situados na mesma vertical”.

Começou então, uma busca incansável dos estudiosos para mostrar qual era a expressão analítica da curva, após Jakob Bernoulli lançar um problema para os cientistas da época. De acordo com Pereira (2007), Jakob publicou no ***Acta Eruditorum***[1], o desafio mencionado acima: encontrar a curva formada por um fio pesado, flexível, inextensível, e de densidade constante em todo o seu comprimento, suspenso nos seus extremos.

Figura 1 - Problema da catenária

Fonte: Maor (1994, p. 141)

1 Revista Científica alemão publica entre 1682 e 1782.

ISBN: 978-85-61702-77-9

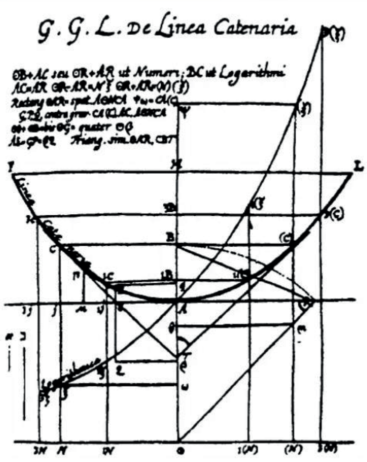
Após o desafio, Huygens, Leibniz e Jean (ou Johann) Bernoulli dedicaram-se para resolver o problema, em que cada um contribuiu para a descoberta. Os três apresentaram soluções, contudo, cada um abordou o problema de uma maneira distinta, utilizando o método que achavam mais conveniente. Entretanto, os três obtiveram a mesma solução.

É um fato que havia muitos atritos entre os membros da família Bernoulli e a busca pela solução do problema proposto por Jakob trouxe uma instabilidade ainda maior na relação entre os irmãos. De acordo com Mendes (2017), foram 44 anos entre a primeira solução de Galileu Galilei, que estava incorreta e necessitava de ajustes, até chegar na solução correta exibida por Jean Bernoulli.

Vale destacar que, segundo Mendes (2017), cada matemático utilizou seu método para a solução do problema, seja utilizando o Cálculo Diferencial, proposto por Leibniz, uma solução geométrica sugerida por Huygens, ou as sugestões analíticas advindas dos irmãos Bernoulli. Sendo assim,

> A descoberta da equação da catenária pode ser considerada como uma importante solução dos problemas desafiadores da história do cálculo. Além de Johann Bernoulli, Leibniz e Huygens também resolveram o problema. Huygens, em 1646, com apenas dezessete anos de idade, provou que a corrente suspensa não poderia adquirir a forma de uma parábola sem chegar a definir qual seria essa nova curva. Tempos depois, ele voltou ao problema e conseguiu, por meio de métodos geométricos, solucionar esse desafio. (TALAVERA, 2008, p. 43).

Figura 2 - Desenho de Leibniz



Fonte: Maor (1994, p. 142)

Dessa forma, para Mendes (2017), a equação da catenária pode ser considerada como uma importante solução dos problemas desafiadores da história do cálculo. Pois, naquela época, as ferramentas disponíveis para os estudos acerca das curvas não eram suficientes, e daí, o Cálculo Diferencial estava se mostrando bastante eficaz. Sendo assim, Talavera (2008, p. 44) corrobora afirmando que,

> Com a geometria analítica, as curvas poderiam ser estudadas através de suas equações, mas como qualquer equação poderia produzir uma nova curva, os estudiosos da geometria das curvas do século XVII estavam se confrontando com um número grande de curvas a pesquisar. Com essas novas curvas, a tradição grega dos métodos geométricos sintéticos não era mais suficiente, além do fato de as novas curvas apresentarem problemas para a determinação de suas áreas e perímetros.

Ainda sobre o problema proposto por um dos membros da família Bernoulli, as soluções analíticas e geométricas contribuíram significativamente para o estudo e interesse de novas curvas pelos matemáticos da época. Dessa forma, Mendes (2017, p. 21) diz que

> A equação da catenária era simplesmente subentendida a partir do modo como a curva era construída, como o desenho de Leibniz. Considerando a forma analítica e geométrica, as curvas permitem que suas resoluções acontecessem por equações. Sendo assim, qualquer curva poderia ser expressa por uma equação.

Outro fator importante a ser destacado é que, a equação dessa tão famosa curva é dada por uma função transcendente, ou seja, que não pode ser expressa por uma combinação finita de operações algébricas. De acordo com Maor (1994), a catenária é dada, na notação moderna, da seguinte maneira: $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$, em que a é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente, ou seja, sua densidade linear (massa por unidade de comprimento) e a tensão com a qual ela é segura.

No entanto, a equação naquela época, segundo Maor (1994) não foi apresentada na forma acima, pois ainda não havia um símbolo para o número , e a função exponencial era apenas vista como o inverso da função logarítmica. Ademais, de acordo com Eves (2004), a equação hiperbólica que define a catenária foi criada em 1757 por Vicenzo Riccati (1707 - 1775). Assim,

ISBN: 978-85-61702-77-9

> Com essa visão histórica da catenária, pode-se observar o caminho percorrido entre a observação da curva no ano de 1646 por Galileu e chegar a uma expressão algébrica no ano de 1757 por Riccati. Foram 111 anos de empenho, descobertas, desafios, conflitos, discordâncias e concordâncias, com grandes nomes associados a essa pesquisa e muitas contribuições que a catenária deixou para história da Matemática. (MENDES, 2017, p. 22).

UMA CATENÁRIA PODE SE APROXIMAR DE UMA PARÁBOLA?

De acordo com Talavera (2008), a catenária é descrita pela curva cuja equação é $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$, em que a constante a é dada a partir de parâmetros físicos da corrente e da tensão com a qual ela é suspensa.

Cientes disso, se utilizarmos a Fórmula de Taylor para aproximar a função associada à equação da catenária $f(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$, que, ainda, pode ser descrita por f(x) = cosh(x), a um polinômio algébrico, encontraremos

$$cosh(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} = 1 + \frac{x^2}{2} + r(x),$$

uma vez que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \; e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

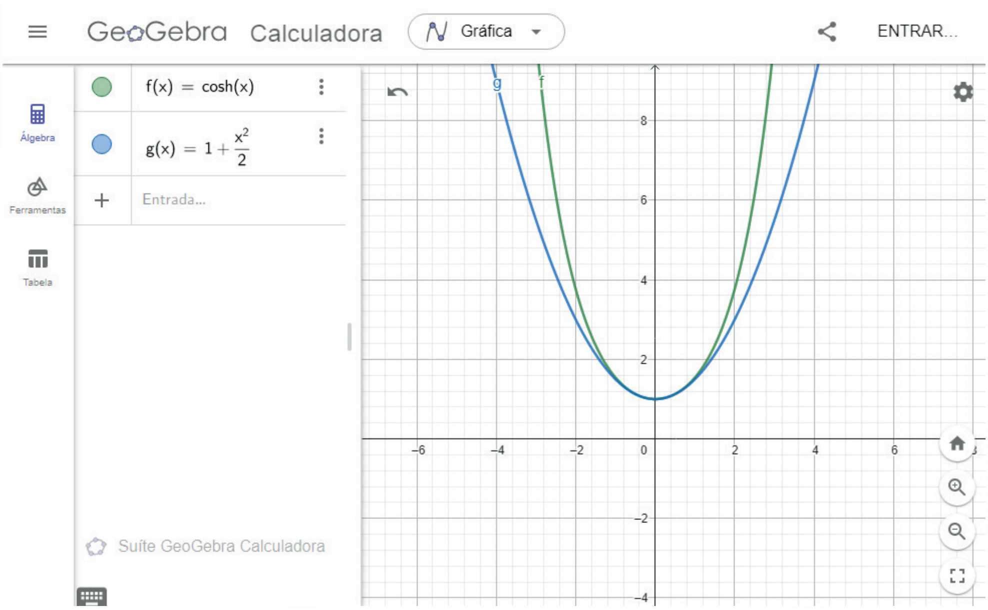
e $r(x)$ é o erro entre a catenária e a parábola, de ordem $(^1/_2)^2$.

Segundo Sousa, Alves e Souza (2022), ao observarmos a fórmula explícita da catenária e da parábola, conseguimos imaginar o porquê de Galileu Galilei ter cometido o equívoco de confundir as duas curvas: a equação da catenária corresponde à de uma parábola acrescida de um termo de ordem 4.

Utilizando o GeoGebra – software matemático gratuito de geometria dinâmica – conseguimos visualizar essas aproximações.

ISBN: 978-85-61702-77-9

Figura 3 – Catenária e Parábola no GeoGebra



Fonte: Print screen do GeoGebra online, 2023.

LUGARES ONDE A CATENÁRIA PODE SER ENCONTRADA

Segundo Talavera (2008, p. 76), "fios de alta tensão e as cordas suspensas por duas hastes verticais usadas em bancos e supermercados, com a finalidade de separar e organizar filas de pessoas, são bons exemplos para a curva catenária." No entanto, a catenária também se destaca na arte e na arquitetura. Tal como exemplificado pela notável contribuição do artista espanhol Antoni Gaudí, que projetou um majestoso prédio, em Barcelona, chamado Casa Mila. Essa incrível e atraente obra possui belos arcos em forma de uma catenária. (Kaplan, 2008)

ISBN: 978-85-61702-77-9

Figura 4 - Casa Mila

Fonte: Quatro cantos do mundo, 2015.

Figura 5 - Casa Mila

Fonte: Ok apartment Barcelona, 2018.

ISBN: 978-85-61702-77-9

Também no Casa Mila, uma escultura composta por correntes suspensas encontra-se no patamar superior. Como as correntes adotam, por sua própria natureza, a configuração elegante de uma catenária, esta obra revela-se como uma série de catenárias entrelaçadas em um esplêndido arranjo artístico. (Kaplan, 2008)

Figura 6 - Escultura no Casa Mila

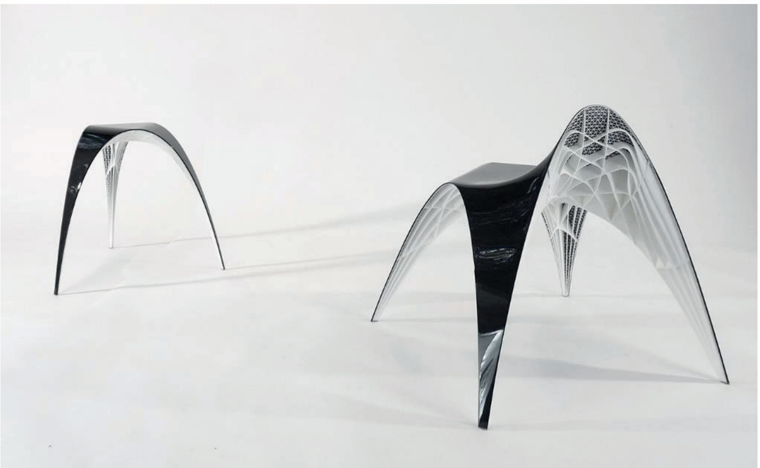
Fonte: Ferrovial blog, 2017.

Além disso, podemos mencionar a ***Gaudí Chair***, uma cadeira projetada pelo designer Bram Geenen em 2010. Dante (2016) pontua que a peça é composta por fibras de carbono, náilon e vidro, unidas por um jato de laser. Ainda de acordo com o autor, é na construção do "esqueleto" que entra a teoria da catenária e que o título da obra foi em homenagem a Antoni Gaudi, arquiteto explorador da catenária. Nessa perspectiva,

O modo de fabricar a estrutura que sustenta a cadeira é obtido por um raciocínio análogo ao de suspender o conjunto de grades no teto e deixar que a gravidade atue sobre ele, adquirindo o formato mais lógico e a força máxima necessária, como acontece com estruturas suspensas como as descritas pela equação de uma catenária. (DANTE, 2016, p. 139).

ISBN: 978-85-61702-77-9

Figura 7 - *Gaudí Chair*, cadeira projetada por Bram Geenen



Fonte: Bram Geenen.

Já em Minnesota, o Marquette Plaza - concebido pelo arquiteto Gunnar Birkerts - constitui um exemplar extraordinário atualizado, em que a catenária não apenas se integra originalmente ao design externo, mas também empresta uma imagem visual singular e inovadora à estrutura edificada. (Kaplan, 2008)

Figura 8 - Marquette Plaza

Fonte: The di wire, 2018.

ISBN: 978-85-61702-77-9

Ademais, também podemos encontrar a catenária em outras estruturas. Kaplan (2018, p. 52, tradução nossa) “Eero Saarinen and Associates projetou o Aeroporto Internacional de Dulles, que também incorpora o design de catenária em formato atraente”

Figura 9 - Aeroporto Internacional de Dulles

Fonte: FairFax Country, Virginia.

É relevante abordar que, a catenária encontra-se presente em pontes, em particular, nas famosas pontes pênseis. De acordo com Talavera (2008), essa ponte pode ser descrita como uma construção de concreto que liga duas margens, em que existem cabos que são tracionados em forma de arcos invertidos.

> Essas pontes podem ser grandes ou pequenas, são obras modernas, cada uma delas realizada para solucionar um problema imposto pela natureza ou minimizar problemas que surgiram a partir do desenvolvimento desenfreado das grandes metrópoles. As pontes pênseis existem em vários países, inclusive no Brasil. (Talavera, 2008, p. 48)

No Brasil, ainda segundo Talavera (2008), a ponte pênsil mais antiga é a Ponte Pênsil de São Vicente, projetada pelo engenheiro Francisco Saturnino Rodrigues de Brito. Construída no ano de 1914 e localizada na cidade de São Vicente, em São Paulo. Essa obra foi construída com o intuito de melhorar o saneamento básico da cidade.

ISBN: 978-85-61702-77-9

Saturnino de Brito assumiu em 1905 a chefia da Comissão de Saneamento de Santos, respeitando, em sua gestão, a topografia e hidrologia da cidade, evitando obras desnecessárias. Construiu a Ponte Pênsil de São Vicente com o objetivo de afastar a descarga de esgoto da cidade. (Talavera, 2008, p. 58).

Figura 10 - Ponte Pênsil de São Vicente

Fonte: BNDES.

Figura 11 - Ponte Pênsil

Fonte: Blogspot, 2009.

ISBN: 978-85-61702-77-9

Um outro arquiteto de renome que se destaca na aplicação da catenária em seus projetos é Eero Saarinen (1910-1961), nascido na Finlândia e filho do também arquiteto Eliel Saarinen. Sua obra, denominada Arco do Portal, localizada em St. Louis, nos Estados Unidos, tornou-se um memorial de extrema relevância para o país.

> Arquiteto e designer finlândes migrou para os EUA em 1923. Em 1947, venceu o concurso para o Gateway Arc, em Sant Louis, Missouri. A obra foi concebida como um enorme arco localizado às margens do Rio designado por Mississipi. O arco é uma curva catenária, cujo vão e altura possuem ambos, 192 metros. Ele consiste em uma dupla pele de aço - na parte externa, aço inoxidável e, na parte interna aço carbono. (Lima e Miranda, 2021, p. 48)

Figura 12 - Arco do Portal

Fonte: Lemare Moveis, 2022.

ATIVIDADE: INVESTIGANDO AS PROPRIEDADES MATEMÁTICAS DA CATENÁRIA E DA PARÁBOLA

O objetivo dessa atividade é explorar as propriedades matemáticas fundamentais da catenária e da parábola, incentivando os alunos a aplicarem os conceitos matemáticos, a fim de compreender e diferenciar essas curvas.

ISBN: 978-85-61702-77-9

Para a realização, serão necessários os materiais: papel milimetrado, calculadoras científicas, régua e compasso.

Procedimento:

1. Apresentação do conteúdo ou revisão teórica;
2. Atividade Prática I - Equações e Gráficos: o professor deve distribuir folhas de papel quadriculado aos alunos e pedir que resolvam e representem graficamente as equações de catenária e parábola em coordenadas cartesianas. Nesse momento, pode ser utilizado alguma calculadora para auxiliar nos cálculos, sobretudo, dos pontos sobre a curva da catenária;
3. Atividade Prática II: utilizando régua e compasso, os alunos devem realizar construções geométricas que evidenciem propriedades específicas de cada curva. Por exemplo, podem investigar as relações entre os focos e a diretriz da parábola, ou analisar a curvatura variável ao longo da catenária;
4. Resolução de Problemas: o professor pode apresentar problemas que envolvam aplicações práticas de catenárias e parábolas, como questões de engenharia, arquitetura ou física. Os alunos devem resolver esses problemas, aplicando os conceitos matemáticos aprendidos.

Por último, conclui-se a aula ressaltando a importância das catenárias e parábolas em diversas disciplinas matemáticas e científicas, e incentive os alunos a refletir sobre como esses conceitos podem ser aplicados em situações do mundo real.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em resumo, é de grande valia destacar a relevância do ensino da catenária no contexto da Educação Matemática, oferecendo uma abordagem enriquecedora que transcende a mera transmissão de conceitos abstratos. A compreensão dessa curva em contraste com a parábola, não apenas aprofunda o conhecimento matemático dos alunos, como também enriquece sua apreciação pela disciplina.

Ao apresentar o contexto histórico abrangente que atravessa a trajetória da catenária, os estudantes são instigados a conhecer a matemática como uma disciplina viva e dinâmica, conectada à história humana. Além disso, a confusão

ISBN: 978-85-61702-77-9

inicial entre catenária e parábola pelos matemáticos antigos soa como um exemplo das complexidades presentes no desenvolvimento do pensamento matemático ao longo do tempo.

Ademais, a atividade prática que fora apresentada surge como uma ferramenta pedagógica de grande valia para os educadores que buscam aprimorar o ensino de matemática. Pois proporciona aos alunos a oportunidade de não apenas manipular equações em papel, mas também de explorar visualmente as curvas em atividades práticas. Dessa forma, os educadores podem não apenas promover uma compreensão mais rica dessas curvas, mas também estimular o pensamento crítico e a resolução de problemas, preparando os alunos para enfrentar desafios matemáticos mais complexos no futuro.

Portanto, ao integrar a catenária no ensino de matemática, não apenas estimulamos a curiosidade dos alunos por meio de experiências práticas e aplicações históricas, mas também nutrimos a paixão pelo aprendizado matemático, capacitando os alunos a verem a disciplina como uma ferramenta essencial para a compreensão do mundo.

REFERÊNCIAS

ASPECTOS DA PARÁBOLA E DA CATENÁRIA: UM ESTUDO À LUZ DA GEOMETRIA DINÂMICA. Florianópolis: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 17, 2022. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/88156/51998. Acesso em: 14 nov. 2023.

BLOGSPOT. **Ponte Pensil - São Vicente**. Disponível em: http://pontepensil.blogspot.com/. Acesso em: 15 nov. 2023.

BNDES. **Ponte pênsil**. Disponível em: https://www.resjeroteirosbaixadasantista.prceu.usp.br/sitio/ponte-pensil. Acesso em: 15 nov. 2023.

BRAM GEENEN. Disponível em: https://bramgeenen.com/. Acesso em: 13 nov. 2023.

CERQUEIRA, Adriano Almeida. **Parábola e suas Aplicações**. 2015. 55 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

ISBN: 978-85-61702-77-9

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FAIRFAX COUNTRY, VIRGINIA. Disponível em: https://www.fxva.com/listing/dulles-international-airport/1223/. Acesso em: 15 nov. 2023.

FERROVIAL BLOG. **¿Cuál es la relación entre Gaudí y las tecnologías emergentes?.** Disponível em: https://www.pinterest.es/pin/751960469013226280/. Acesso em: 13 nov.

KAPLAN, Gail. **The Catenary**: art, architecture, history, and mathematics. Art, Architecture, History, and Mathematics. 2008. Towson University, USA. Disponível em: https://archive.bridgesmathart.org/2008/bridges2008-47.pdf. Acesso em: 14 nov. 2023.

LACATENARIA en arquitectura. Universidade Politécnica de Madrid. Disponível em: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/fdistancia/pie/Chip%20geom%C3 %A9trico/Catenaria.pdf. Acesso em: 14 nov. 2023. 2023.

LEMARE MOVEIS. **Eero Saarinen: conheça a biografia, principais obras e os móveis que fizeram história.** Disponível em: https://blog.lemaremoveis.com.br/eero-saarinen/. Acesso em: 15 nov. 2023.

MAOR, Eli. ***e*: a história de um número**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MENDES, Marlon Freitas. **A curva catenária como aplicação da função exponencial**. 2017. 76 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2008.

OK APARTMENT BARCELONA. **De architectuur van het Casa Mila**. Disponível em: https://www.barcelonacheckin.com/nl/r/barcelona_gids/artikels/casa_mila_architectuur/ Acesso em: 13 nov. 2023.

ISBN: 978-85-61702-77-9

PEREIRA, Liliana Isabel Monteiro Soares Pereira. **Uma Abordagem Interactiva ao Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira.** Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. 2007.

PROBLEMA DA CATENÁRIA: HISTÓRIA, SOLUÇÃO E APLICAÇÕES. Minas Gerais: Matemática & Ciência, 2021. Disponível em: https://periodicos.pucminas.br/index.php/matematicaeciencia/article/view/26814/18528. Acesso em: 15 nov. 2023.

QUATRO CANTOS DO MUNDO. **Casa Milá (La Pedrera) – Barcelona – Arquitetura Espetacular.** Disponível em: https://quatrocantosdomundo.wordpress.com/2015/05/17/casa-mila-la-pedrera-barcelona-arquitetura-espetacular/. Acesso em: 13 nov. 2023.

TALAVERA, Leda Maria Bastoni. **Parábola e catenária: história e aplicações**. 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

THE DI WIRE. **KBS Strategic Opportunity REIT compra Minneapolis Office Tower por US$ 88,4 milhões.** Disonível em: https://thediwire.com/kbs-strategic-opportunity-reit-buys-minneapolis-office-tower-88-4-million/. Acesso em: 13 nov. 2023.

ISBN: 978-85-61702-77-9