

## UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA APRENDER RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Andreza Rodrigues da Silva

*Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Pernambuco*

*andreza.r.1996@gmail.com*

Claudjane Melo Galindo

*Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Pernambuco*

*claudjane\_10@hotmail.com*

Edinilza Marques de Souza

*Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Pernambuco*

*edilcaelizabeth@hotmail.com*

Carlos Bino Souza

*Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Pernambuco*

*bino.souza@pesqueira.ifpe.edu.br*

### RESUMO

O presente artigo buscou analisar como o uso da Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC) pode contribuir para o ensino e aprendizagem da trigonometria, e entre as várias formas de tecnologias disponíveis que podem auxiliar professores e alunos em diferentes etapas, níveis e modalidades de ensino, optamos por direcionar nossa pesquisa para o uso do software educacional. Para isso, elaboramos um roteiro de atividades e desenvolvemos uma sequência didática, onde realizamos uma intervenção com alunos do Instituto Federal de Pernambuco (IFPE), campus Pesqueira, na turma de Médio Integrado em Edificações, na componente curricular de matemática. Para a realização dessa pesquisa utilizamos o software GeoGebra como ferramenta facilitadora de ensino. A atividade com o GeoGebra tinha por objetivo verificar se por meio de construções interativas de figuras e objetos os alunos poderiam compreender e visualizar melhor a representação gráfica e algébrica das razões trigonométricas no ciclo trigonométrico. Pois as ferramentas do software GeoGebra permitem uma associação e uma percepção dinâmica com a Álgebra e a Geometria. A partir disso, foi feita então, uma análise dos dados obtidos para verificar a desenvoltura dos alunos utilizando o suporte tecnológico como ferramenta de ensino. Dessa forma, do nosso ponto de vista, a partir da experiência em sala de aula e dos resultados alcançados após a realização das atividades, podemos identificar vários aspectos positivos referentes à motivação, compreensão visual, interação dos alunos a respeito da atividade, entre outros. Logo a presente pesquisa indica que o uso do software GeoGebra favoreceu o ensino e a aprendizagem do conteúdo deixando claro as suas potencialidades.

Palavras-chave: TIC, GeoGebra, Trigonometria.

## 1. Introdução

A trigonometria é conhecida por ser um componente curricular considerada difícil, abstrata, repleta de números, incógnitas e símbolos matemáticos, logo um dos fatores que levam os alunos a sentirem dificuldades nesse conteúdo está geralmente relacionado a questões de visualização. E quando estamos inseridos em um processo de aprendizagem buscamos aprender determinado conteúdo por associação, tentamos visualizar e explicar o significado da teoria, etc.

Um exemplo dessas dificuldades encontradas é quando um professor afirma, por exemplo, que  $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$ , e não mostra como essa relação pode ser compreendida de uma maneira mais clara através do teorema de Pitágoras, que possibilita ao mesmo tempo uma visualização algébrica e geométrica, pode acabar fazendo com que o aluno não consiga visualizar e compreender o que essas relações matemáticas significam, os conceitos apresentados acabam tornando-se vagos no processo de raciocínio e autonomia que o aluno tem para construir seu conhecimento.

Amaral (2002) aponta que a trigonometria é um ramo da matemática que apresenta um alto grau de abstração gerando dificuldades na compreensão do conteúdo por parte dos alunos.

Dos vários conteúdos da matemática, a trigonometria é um dos de mais difícil compreensão pelos (as) alunos (as). Acreditamos que tal dificuldade se deva ao seu grau de abstração e a forma expositiva/ transmissiva em que a mesma é ensinada. Os fatos e conceitos são apresentados sem que o aluno tenha oportunidade de construí-los.

Em um artigo publicado na revista Diálogo Educacional, Moran, professor aposentado de Novas Tecnologias da USP, ressalta a importância de adotar recursos tecnológicos no processo de aprendizagem, pois de forma funcional a tecnologia apresenta inúmeras possibilidades, onde é possível observar alguns conceitos de uma nova forma e com um novo olhar, diferenciando-se assim dos recursos tradicionais que são limitados em relação à visualização, manipulação, etc.

E sabendo que o uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC), pode ser um excelente recurso pedagógico, trouxemos então uma discussão sobre o seu uso. E entre essas tecnologias estão contidas os softwares educacionais vistos como uma potente ferramenta

matemática. Pois o uso da tecnologia pode contribuir positivamente para promover e facilitar uma aprendizagem.

Borba e Penteadó (2007) afirmam que as TIC's podem ser grandes aliadas no ensino da matemática, pois o uso da tecnologia permite uma maior interação com uma atividade proposta, dessa forma permite que o aluno tenha uma visualização mais ampla. A partir do uso da informática, voltada para o campo educacional, o aluno pode refletir sobre seus processos de resolução.

Seguindo esse pensamento, Ponte (2000) afirma que o uso das TIC's na matemática pode ser muito significativo, pois possibilita ao aluno uma melhor compreensão da linguagem gráfica, e também, novas maneiras de representação. Além disso, o autor destaca a importância e relevância dos professores dominarem o uso das TIC's, e levarem isso para sua prática docente, e isso inclui o uso de software educacional.

E para que a utilização desses softwares seja realizada de forma eficaz, requer certo domínio das TIC's e principalmente requer planejamento. Ou seja, o professor precisa conhecer bem o conteúdo, conhecer o software a ser utilizado e estabelecer objetivos a serem alcançados, pois não tem sentido usar um recurso tecnológico apenas para "mudar a rotina", é preciso ter objetivos claros e específicos para seu uso. Só assim é possível que a tecnologia venha a facilitar a compreensão do aluno sobre determinado conteúdo.

Entre tais recursos tecnológicos direcionamos nossa pesquisa ao uso do software de geometria dinâmica. Para Gravina (1996) e Zulatto (2002), um ambiente de geometria dinâmica tem grande importância, pois isso pode possibilitar ao aluno ferramentas que o mesmo pode utilizar para superar suas dificuldades. Com o uso de um software o aluno poderá interagir com suas construções, podendo, por exemplo, movimentar objetos sem mudar suas características principais.

A realização desse estudo parte-se de tentativa de elaborar uma sequência didática, voltada para o ensino e aprendizagem das razões trigonométricas no círculo trigonométrico, utilizando recursos tecnológicos como ferramenta suporte. Logo, nosso estudo tem por objetivo verificar e analisar o rendimento dos alunos utilizando esses recursos como ferramenta facilitadora no processo de ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos. Para isso, utilizamos como ferramenta de ensino o software GeoGebra, um software interativo e de fácil manejo que permite de maneira dinâmica, relacionar em um mesmo campo visual geometria com álgebra, proporcionando interação e despertando o interesse do aluno.

## 2. Metodologia

Nosso artigo apresenta uma sequência didática inspirada nas fases da engenharia didática. Descrevemos e justificamos a escolha do nosso tema como também o campo da realização. Analisamos então, questões direcionadas ao ensino em aspectos didáticos e cognitivos dos alunos, planejamos a aula onde adotamos o software GeoGebra como ferramenta de ensino e executamos o planejado. Posteriormente fizemos outra análise a partir dos dados coletados, resultado da observação direta e considerando a produção dos alunos. Para assim confrontar as análises tendo em vista as hipóteses e os resultados para então ser feita a validação.

A sequência didática foi desenvolvida no IFPE campus Pesqueira, na turma de Médio Integrado em Edificações. A referida aula foi realizada na componente curricular Matemática II. Estando presentes 27 e 16 alunos nos dias 11 e 21 de Março de 2016, respectivamente. Os dados coletados na pesquisa foram feitos com os alunos presentes nos dois dias de intervenção.

As atividades foram realizadas em três aulas com duração de 45 minutos cada. Nessas aulas utilizamos o software GeoGebra para o desenvolvimento da aula sobre relações trigonométricas. A sequência didática proposta continha seis questões, que foram realizadas com o auxílio do GeoGebra, exceto o item (a) da atividade 4 e a atividade 5. Essas duas questões foram feitas sem o GeoGebra justamente para verificar o desempenho dos alunos em diferentes situações.

Inicialmente, antes de aplicarmos as atividades, foi realizada uma explicação necessária sobre o conteúdo e sobre o software GeoGebra, para que assim eles pudessem fazer os exercícios e conseguissem manipular o software sem grandes complicações.

Nas atividades 1, 2 e 3 foi utilizado o Arquivo 01 (ver Figura 1), esse material disponibilizado aos alunos continha um círculo trigonométrico de raio um, para avaliar a secante, cossecante e a cotangente em diferentes quadrantes. Essas atividades foram realizadas nas duas primeiras aulas, referente ao dia 11 de março de 2016.

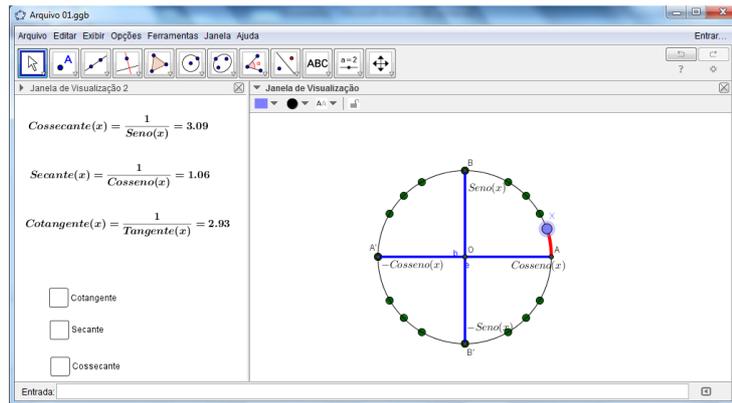


Figura 1: Janela do Arquivo 01

Na primeira atividade, que consistia em um quesito com os itens (a), (b) e (c), os alunos deveriam observar na circunferência orientada de centro na origem do sistema e raio unitário denominado ciclo trigonométrico, a variação do sinal da secante, cossecante e cotangente, e através da manipulação e observação do Arquivo 01, os alunos deveriam preencher as tabelas com os valores de cada quadrante.

Na segunda Atividade, que consistia em três quesitos com os itens (a), (b), (c) e (d) cada, os alunos iriam analisar os valores mostrados em cada quadrante para descrever se os mesmos cresciam ou decresciam. Já na terceira atividade, formada por dois quesitos, foi pedido que os alunos preenchessem uma tabela, indicando os valores de alguns ângulos da secante, cossecante e cotangente, justificando a inexistência de alguns.

Na terceira aula referente ao dia 21 de março de 2016, foram aplicadas as atividades 4, 5 e 6 utilizando o arquivo 02 (ver figura 2). Arquivo esse, que apresentava um ciclo trigonométrico com os ângulos notáveis, onde era possível identificar o representante de um ângulo no 1º quadrante.

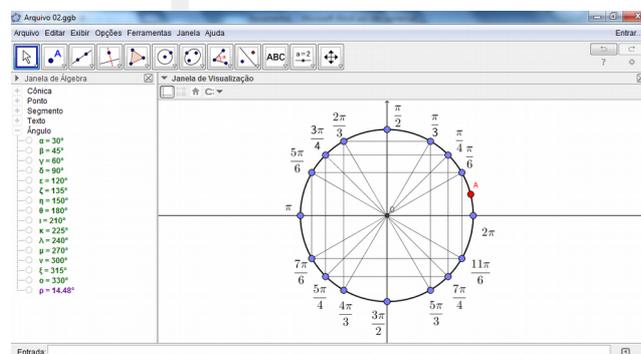


Figura 2: Janela do Arquivo 02

Na quarta atividade, caracterizada por um quesito e itens que vão de (a) ao (g), inicialmente o aluno deveria calcular o valor da  $\cotg 150^\circ$  sem o auxílio do GeoGebra, que caso utilizada possibilitaria verificar o seu representante no 1º quadrante. Após isso, deveriam responder as demais questões, com processo de resolução semelhante ao item (a), porém, utilizando o software GeoGebra.

Na quinta atividade, como os alunos já haviam realizado atividades para identificar os sinais dos quadrantes em cada caso, foi proposto aos estudantes que os mesmos desenvolvessem a seguinte expressão:

$$\frac{\sec(x) \cdot \operatorname{cosec}(x) \cdot \cot g(x)}{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)}$$

E para solucionar esse problema é informado que a incógnita  $x$  é um arco com extremidade no 4º quadrante. E que no desenvolvimento analisassem os sinais. Ressaltando que essa atividade foi feita sem o auxílio do computador.

Na última atividade proposta os alunos deveriam fazer uma redução ao primeiro quadrante dos itens apresentados, para isso, dever-se-ia achar no Arquivo 02 o ponto correspondente, dos arcos dados, no primeiro quadrante.

### 3. Resultados e Discussão

É possível notar que o uso das tecnologias na sala de aula pode contribuir bastante na aprendizagem da matemática de uma forma dinâmica e de caráter diferenciado. Mas ressaltamos que o software sozinho não ensina, é preciso um planejamento prévio.

Por não realizarmos um acompanhamento prévio com os estudantes, não podemos afirmar que o desempenho foi melhor ou que eles estavam mais motivados com a aula que de costume. Porém, pode-se dizer que foi possível perceber que, apesar das dificuldades que alguns apresentaram em relação ao conteúdo e em relação ao uso do software, os alunos demonstraram estar interessados em realizar as atividades que foram propostas.

Durante a intervenção, podemos observar que os alunos interagem entre si sobre o conteúdo e constantemente nos chamavam para tirar dúvidas a respeito das atividades e para fazer perguntas que não estavam propostas na sequência didática, mas estavam relacionadas ao conteúdo.

Vale destacar que alguns alunos manipularam o software com facilidade, mesmo sem nunca terem feito o uso do software. E o modo como construímos os arquivos 01 e 02, e o desenvolver da proposta didática facilitou o processo de aprendizagem para os alunos.

Tendo em vista os dados recolhidos das atividades aplicadas, pode-se afirmar que em geral os resultados foram satisfatórios, pois a sequência didática desenvolvida com o auxílio do GeoGebra apresentou um maior número de acertos. As atividades 1, e 2, o quesito 1 e os itens (b), (c), (d), (e), das atividades 3 e 4 respectivamente, apresentaram resultados positivos, pois a maioria dos alunos conseguiram realizar as questões propostas. Já os demais apresentaram um percentual de erro significativo. Abaixo, no gráfico 1, pode-se observar um exemplo de atividade que tivemos êxito, já no gráfico 2, por exemplo, observamos aí que metade dos alunos erraram ou não responderam a questão.



Gráfico 1. Dados da Atividade 1

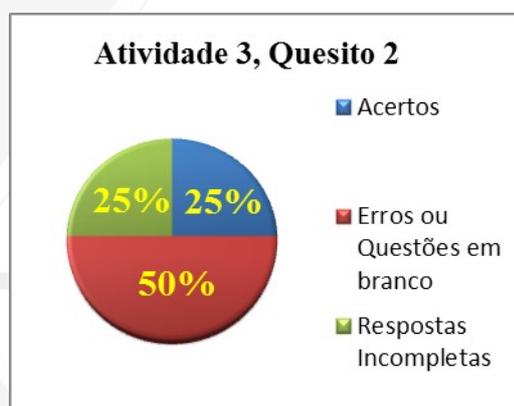


Gráfico 2. Dados da Atividade 3

As primeiras três atividades, exceto o quesito 2 da atividade 3, apresentaram um percentual acima de 80% de acertos, chegando algumas questões a atingir 100% de acertos. No quesito 2 (ver gráfico 2), 50% dos alunos não conseguiram responder ou erraram, nessa questão os alunos teriam que justificar a inexistência das secantes dos ângulos de  $90^\circ$  e  $270^\circ$ , cossecante de  $0^\circ$  e cotangentes de  $90^\circ$  e  $180^\circ$ .

Para desenvolver essa questão seria necessário que além da visualização do arquivo 01, o aluno soubesse o conceito de retas paralelas, para assim concluir o motivo da inexistência desses valores abordados. Pois o arquivo construído e disponibilizado, por exemplo, não mostra que quando movimentamos o ponto X para as coordenadas (-1, 0) a cotangente é inexistente, ao invés disso é apontado um valor para a cotangente de  $180^\circ$ , conforme a figura 3.

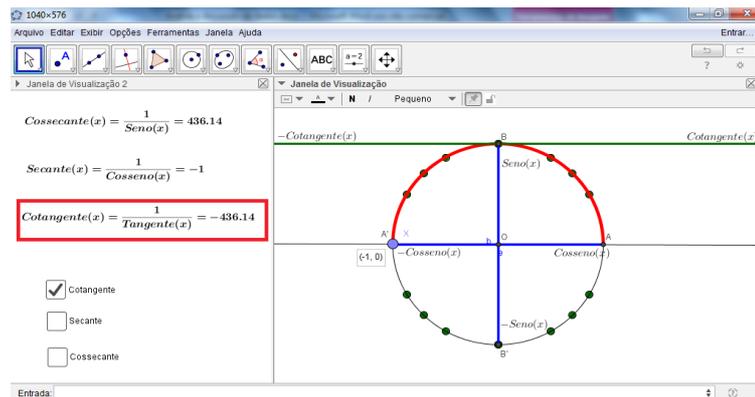


Figura 3: Janela do Arquivo 02 mostrando o valor da cotangente no ângulo de  $180^\circ$

O ponto “X” informa as coordenadas (-1, 0), contudo esse resultado é mostrado porque o arredondamento utilizado foi de uma casa decimal, e se mudar o número de casas decimais terá uma coordenada com o valor da ordenada y tendendo a zero, mas não igual à zero. Isso acontece porque não foi construído um arquivo em que o ponto X ficasse exatamente no grau solicitado.

Dessa maneira, 25% acertaram a questão e outros 25% deram respostas incompletas, afirmando apenas que as retas seriam paralelas. Na Figura 4, pode-se observar um exemplo esperado de resolução.

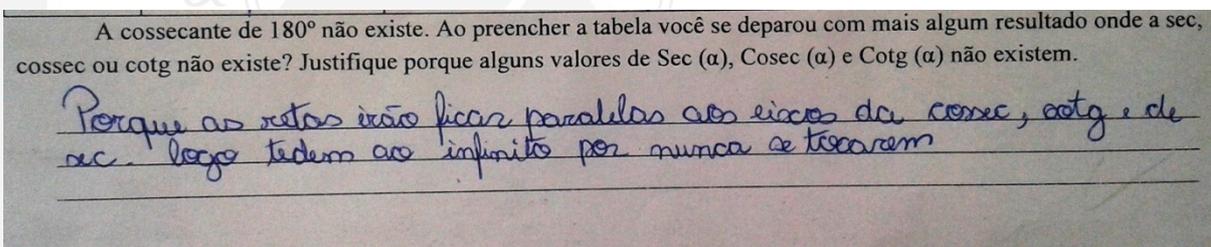


Figura 4: Exemplo de resolução do item 2 da atividade 3

O item (a) da atividade 4 foi feita sem o auxílio do GeoGebra para que pudesse, posteriormente, ser feita uma análise do desempenho dos alunos com e sem o auxílio do software. Nessa questão, deveria ser calculado a  $\cotg 150^\circ$  sem utilizar o auxílio disponível no arquivo 02, e 25% dos alunos não responderam a questão, 12,5% errou totalmente a questão e 37,5% acertaram. Um quarto dos alunos não conseguiu desenvolver o problema até o final por apresentarem dificuldades no desenvolvimento de conceitos de divisão de fração ou não observaram os sinais dos quadrantes, ressaltando que os sinais do seno, cosseno e tangente, em cada quadrante, foram disponibilizados.

Na figura 5, pode-se ver uma resolução incompleta apresentada por dois alunos. Note que não fora desenvolvido a divisão de fração por fração, por esse motivo consideramos a resposta incompleta, e outros dois alunos desenvolveram a expressão, porém não observaram corretamente os sinais dos quadrantes.

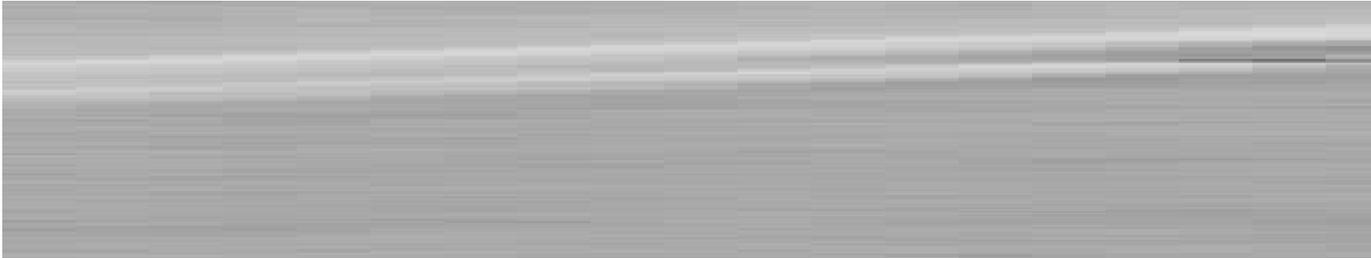


Figura 5: Resolução incompleta da questão.

Ainda na atividade 4, os itens (f) e (g) foram feitos com o auxílio do GeoGebra. No caso do item (f), pedia-se que fosse calculado a  $\sec \frac{11\pi}{6}$  e 43,75% dos alunos erraram a questão por não dominarem os processos de divisão de fração e racionalização do denominador. Já na letra (g), que deveria ser calculado a  $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{4}$ , 43,75% dos estudantes erraram, e os erros foram pelos motivos já citados acima e também por não terem observado os sinais dos quadrantes, desenvolveram todo o cálculo, porém o resultado não foi o adequado.

Na quinta questão (ver figura 6), foi solicitado ao aluno que determinasse o sinal da expressão e para isso não poderia utilizar o auxílio do GeoGebra., com essa atividade esperava-se que, por os alunos terem resolvido algumas questões anteriores que envolviam os sinais dos quadrantes, eles recordassem os sinais e conseguissem atingir o resultado adequado.

#### Atividade 05

Sabendo que  $x$  é um arco com extremidade no 4º quadrante, determine o sinal da expressão  $y$ , dada por:

$$\frac{\sec(x) \cdot \operatorname{cosec}(x) \cdot \cot g(x)}{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)}$$

Figura 6: Atividade da sequência didática.

Porém, 68,75% dos alunos erraram essa questão. Muitos fizeram todo o processo, porém o resultado não foi o adequado por não analisarem o sinal. Observa-se nas figuras 6, 7

e 8 um processo de resolução correta, incorreta e um caso em que o aluno apenas avaliou os sinais sem desenvolver a expressão, respectivamente.

**Atividade 05**

Sabendo que  $x$  é um arco com extremidade no 4º quadrante, determine o sinal da expressão  $y$ , dada por:

$$\frac{\sec(x) \cdot \operatorname{cosec}(x) \cdot \cot g(x)}{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)}$$

Handwritten solution showing the expression being simplified to  $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}$  and then  $\frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$ . The final result is marked as "negativo".

Figura 7: Modelo de resolução feita por um aluno.

**Atividade 05**

Sabendo que  $x$  é um arco com extremidade no 4º quadrante, determine o sinal da expressão  $y$ , dada por:

$$\frac{\sec(x) \cdot \operatorname{cosec}(x) \cdot \cot g(x)}{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)}$$

Handwritten solution showing the expression being simplified to  $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}$  and then  $\frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$ . The final result is marked as "negativo".

Figura 8: Resolução feita por um aluno sem determinar o sinal da expressão

**Atividade 05**

Sabendo que  $x$  é um arco com extremidade no 4º quadrante, determine o sinal da expressão  $y$ , dada por:

$$\frac{\sec(x) \cdot \operatorname{cosec}(x) \cdot \cot g(x)}{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)}$$

Handwritten solution showing the expression being simplified to  $\frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$ . The final result is marked as "negativo".

Figura 9: Resolução avaliando apenas os sinais

A atividade 6 apresentou falhas em seu enunciado, pois não deixou claro o que o aluno deveria fazer, portanto ela será desconsiderada da avaliação. No item (a) foi pedido que fosse reduzido ao primeiro quadrante o arco de  $\frac{5\pi}{6}$  radianos na cotangente, secante e cossecante.

Porém não explicitamos que a resposta deveria ser dada em radianos, e houve, assim, dois tipos de respostas. E no item (b) foi pedido que fizessem uma redução ao primeiro quadrante do arco de  $210^\circ$  na cotangente, secante e cossecante. E novamente ocorreu a mesma situação. Decorrente a isso as respostas apresentaram duas resoluções distintas, ambas estavam corretas, porém esperávamos a redução do item (a) em radianos e a do item (b) em graus.

#### 4. Conclusão

O uso da tecnologia da informação e comunicação pode propiciar um ambiente favorável para que os alunos aprendam determinado conteúdo. E esse suporte tecnológico

auxilia principalmente no ensino da matemática, matéria essa que tem a fama de difícil e chata por ser muito abstrata.

O ensino da matemática é marcado pelo tradicionalismo, e o GeoGebra insere-se nesse contexto com a proposta de uma matemática dinâmica que vem para facilitar o processo de ensino e aprendizagem. E para que a matemática passe de “matéria chata que contém apenas cálculos” para uma “matéria interessante, divertida e dinâmica”, requer que o professor tenha o domínio dessas ferramentas para que não deixe de lado o principal objetivo do conteúdo.

E no ensino da trigonometria a presença de um recurso computacional como o GeoGebra é de suma importância. Pois durante a intervenção podemos notar que com o uso da ferramenta os alunos demonstraram um grande interesse em criar, manipular e através disso formular seu próprio conhecimento, percebemos também que não houve problemas relacionados ao uso inadequado do computador que estava conectado a internet, e, além disso, foi percebido que houve uma maior interação entre os estudantes.

Com base nos objetivos apresentados, consideramos que as nossas expectativas foram alcançadas quando comparamos os resultados obtidos das atividades realizadas com o e sem o auxílio do GeoGebra. Afirmamos isso, também, por verificarmos que os alunos demonstraram estar entusiasmados com as atividades propostas. Logo a finalidade da sequência didática, que era justamente analisar se esses recursos tecnológicos contribuem para a aprendizagem, foi alcançada.

Em decorrência de alguns alunos apresentarem dificuldades em conteúdos de matemática básica, sugerimos que para a realização de intervenções em sala de aula é recomendável identificar quais os conhecimentos prévios necessários para a realização da atividade e se os alunos têm esses conhecimentos que deveriam ter para conseguir acompanhar e desenvolver a sequência didática proposta.

Essa experiência nos mostrou na prática a funcionalidade do software GeoGebra e a importância desses recursos tecnológicos como um todo adotados como ferramenta de ensino e aprendizagem em sala de aula. Podemos afirmar que essa experiência foi bastante produtiva, pois enquanto discentes tivemos acesso às ferramentas ricas que contribuem para o ensino e obtivemos resultados que consideramos positivos.

## 5. Referências

BORBA, M. C.; PENTEADO M. G. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

GRAVINA, M. A. **Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**. In: Simpósio Brasileiro De Informática Na Educação, Belo Horizonte, SBC, 1996. p. 1-14.

IEZZI, G. et al. **Matemática: Volume único**. São Paulo: Atual, 2002.

MORAN, J. M. **Os novos espaços de atuação do professor com as tecnologias**. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 4, n.12, p.13-21, maio/ago. 2004.

PONTE J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SMOLE, K. C. S.; KIYUKAWA, R. **Matemática - Ensino Médio**. São Paulo: Saraiva, 1988. v. 2.

YOUSSEF, A. N.; FERNANDEZ, V. P.; SOARES, E. **Matemática: Ensino Médio**. São Paulo: Scipione, 2000. v. único.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. 2002. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP Rio Claro, SP, 2002.