ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL RESOLVENDO PROBLEMAS DE PRODUTO CARTESIANO E ARRANJO

Educação Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental - GT 09

Cristiane Azevêdo dos Santos PESSOA
Universidade Federal de Pernambuco
cristianepessoa74@gmail.com

Laís Thalita Bezerra dos SANTOS
Universidade Federal de Pernambuco
laisthalita@hotmail.com

RESUMO

O presente estudo analisou como intervenções baseadas na explicitação dos *invariantes* dos problemas combinatórios, na *listagem de possibilidades* como estratégia de resolução, na *sistematização* da listagem e na *generalização* (percepção das regularidades dos problemas) podem facilitar a compreensão de alunos de 5º ano do Ensino Fundamental sobre problemas combinatórios dos tipos Produto Cartesiano e Arranjo. Foram realizados pré-teste, intervenções e pós-teste e comparados os desempenhos, observando as contribuições das intervenções. Os alunos demonstraram que compreenderam os problemas combinatórios a partir da forma como foram trabalhados, mostrando-se capazes de resolver os problemas e, em partes, generalizar seus procedimentos.

Palavras- chaves: Arranjo, Produto Cartesiano, Combinatória.

1. Introdução

Estudos como o de Pessoa e Borba (2009a) apresentam como um dos seus resultados as estratégias desenvolvidas por 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas de Combinatória (Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano). Estas estratégias eram, por vezes, bem sucedidas em encontrar soluções corretas e, em outras ocasiões, iniciavam-se corretamente, mas não eram totalmente bem sucedidas em se chegar ao resultado final correto. O estudo de Pessoa e Santos (2011), também encontrou estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios. Neste estudo as autoras levantaram, além das estratégias, as explicações dos alunos pesquisados sobre o entendimento que os mesmos tiveram no que se refere a cada problema combinatório, sendo possível verificar quais as dificuldades/facilidades dos alunos em relação aos invariantes de cada situação.

Baseando-se nesses estudos, percebe-se que apesar de não haver, na maioria das salas de aula, um ensino sistemático com a Combinatória nos anos iniciais, os alunos de tais anos escolares são capazes de apresentar estratégias válidas de resolução, ainda que sem o esgotamento das possibilidades. Deste modo, as hipóteses levantadas por estes alunos para resolverem situações-problema, assim como a explicitação dessas hipóteses através de suas estratégias, devem ser vistas pela escola como uma oportunidade de perceber como os alunos pensam sobre determinados conceitos e utilizá-las pode ser uma boa alternativa para o ensino.

O estudo atual objetivou analisar os avanços de alunos do 5º ano de escolarização na resolução de problemas de Arranjo e de Produto Cartesiano, após intervenções baseadas na estratégia *listagem de possibilidades*, (identificada em Pessoa e Borba, 2009a, e em Pessoa e Santos, 2011, como a estratégia mais utilizada pelos alunos) juntamente com três outros pilares considerados fundamentais para a aprendizagem da Combinatória, que são o destaque para os *invariantes* de cada tipo de problema combinatório, a *sistematização* e a *generalização.* O estudo atual é um recorte de um estudo maior que analisou os avanços de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem os quatro tipos de problemas combinatórios (Arranjo, Produto Cartesiano, Combinação e Permutação).

2. A Combinatória

Pessoa e Borba (2009b) afirmam que a Combinatória permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um. As autoras classificam os problemas que envolvem o raciocínio combinatório em uma organização única – não identificada em estudos anteriores. A seguir estão colocados os tipos de problemas, ou seja, significados presentes na Combinatória e seus respectivos *invariantes do conceito*, isto é, relações e propriedades que se mantêm constantes: **Produto Cartesiano** (1) Dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado. **Permutação** (1) Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as Permutações. **Arranjo** (1) Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0** < **p** < **n**, sendo **p** e **n** números naturais; (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades. **Combinação** (1) Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0**< **p** < **n, p** e **n** naturais; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de Arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Como exemplos de estudos anteriores que investigaram tipos específicos de problemas, Inhelder e Piaget (1955) estudaram a resolução de problemas de tipo Permutação por parte de alunos com idade em torno de 12 anos; Soares e Moro (2006) investigaram a resolução de problemas de Produto Cartesiano por alunos de 6º e 7º anos de escolarização; Schliemann (1988), numa investigação com adultos escolarizados e com pouca escolarização, trabalhou com problemas de tipo Permutação; Miguel e Magina (2003) investigaram com alunos do 1º ano de Licenciatura em Matemática as estratégias de resolução de Permutações simples e com repetição, Arranjos simples e com repetição e Combinações; Matias, Santos e Pessoa (2011) investigaram, através de entrevistas clínicas individuais, como 22 alunos da Educação Infantil percebiam os problemas de arranjo, compreendiam os invariantes e apresentavam estratégias válidas de resolução com o auxílio de materiais concretos para manipulação. As autoras perceberam que desde a Educação Infantil os alunos são capazes de estabelecer interessantes relações para a resolução de problemas do tipo Arranjo; Moro, Soares e Camarinha (2010), em estudo específico com o significado Produto Cartesiano, com 110 alunos do 4º ao 7º ano do Ensino Fundamental, destacam a percepção da passagem do esquema aditivo para o multiplicativo. Estes autores destacam ainda a necessidade e a relevância do trabalho com problemas de Produto Cartesiano na escola fundamental, desde as séries iniciais, não somente pelo seu significado matemático específico, mas também como alternativa para promover o desenvolvimento cognitivo do aluno, ao ativar a construção de seu raciocínio combinatório, com possíveis reflexos em outras áreas da aprendizagem escolar.

O estudo atual apresenta-se com foco nos problemas de Produto Cartesiano e Arranjo, sendo investigados os possíveis avanços após as intervenções com os pilares citados, sendo este um possível caminho para o ensino de Combinatória no 5º ano do Ensino Fundamental.

3. Objetivos e Método

O presente estudo objetivou experimentar com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental intervenções baseadas no destaque dos *invariantes* dos problemas combinatórios, na *listagem de possibilidades* como estratégia de resolução, na *sistematização* da listagem e na *generalização*; comparar o desempenho dos alunos, em relação à resolução de problemas de Produto Cartesiano e Arranjo, entre o pré-teste e o pós-teste; e analisar, a partir do desempenho dos alunos no pré-teste e no pós-teste, como as intervenções contribuíram para o desenvolvimento da compreensão dos referidos significados.

Acreditando que o destaque para os *invariantes*[1] de cada tipo de problema combinatório, a *sistematização da listagem* e a *generalização* facilitam a compreensão da Combinatória, foi essa a forma de intervenção adotada para ser trabalhada com os alunos de uma turma do 5º ano escolar, sendo esta o Grupo Experimental (GE). Outra turma de 5º ano da mesma escola foi designada para ser o Grupo Controle (GC), com o qual foram trabalhados problemas de raciocínio lógico e problemas multiplicativos de modo geral e não especificamente os de Combinatória. A definição de GE e GC foi feita aleatoriamente. Com os dois grupos (GE e GC) foram realizados um pré-teste, duas sessões de intervenção e um pós-teste.

Os problemas de Produto Cartesiano foram trabalhados na 1ª sessão de intervenção e os problemas de Arranjo foram trabalhados durante a 2ª sessão de intervenção. O primeiro problema de cada um dos tipos resultava em um número menor de possibilidades (grandeza numérica até 10) e os segundos e os terceiros problemas, levavam a um número maior de possibilidades (grandeza numérica até 30). Foram resolvidos os problemas do pré-teste, de modo que fosse possível tirar dúvidas dos alunos e destacar os *invariantes* dos problemas

[1] Para Vergnaud (1990), os invariantes são importantes componentes de um conceito. No presente estudo, defende-se que os invariantes do conceito dos problemas combinatórios se relacionam com a *escolha*, ou seja, a utilização ou não de todos os elementos da situação-problema e com a *ordenação*, ou seja, a geração ou não de novas possibilidades, dependendo do tipo do problema.

combinatórios do tipo Produto Cartesiano e Arranjo que eles já haviam resolvido anteriormente, no pré-teste. Além disso, foi apresentada uma situação-problema ainda não conhecida pelos alunos. O objetivo era o de que eles, após trabalharem os problemas já resolvidos no pré-teste e de terem certo entendimento sobre os *invariantes*, tentassem resolver sozinhos outros problemas dos mesmos tipos combinatórios. Os problemas trabalhados no pré-teste, nas sessões de intervenção e no pós-teste foram os seguintes:

Pré-teste:
Produto Cartesiano:
1)Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?
2)Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts?
Arranjo:
3)Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?
4) A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: África, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa?
Intervenções:
Resolução dos dois problemas de cada um dos tipos apresentados no pré-teste e novo problema apresentado.
Novo problema de Produto Cartesiano: A mãe de Pedrinho fez oito tipos de suco (maracujá, laranja, acerola, goiaba, uva, manga, abacaxi e caju) para a comemoração do dia das crianças na escola do seu filho. Ela levou copos descartáveis de quatro cores (amarelo, branco, cinza e preto). Quantas combinações diferentes poderão ser formadas, combinando todos os sucos com todos os copos?
Novo problema de Arranjo: Jane, Neide, Vanessa e Paula estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes poderemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada na disputa?
Pós-teste:
Produto Cartesiano:
1) Juliana é jogadora de tênis e tem quatro raquetes (vermelha, azul, preta e marrom) e duas bolinhas (amarela e verde) para jogar no torneio. Quantas combinações diferentes ela pode formar, combinando todas as raquetes com todas as bolinhas?
2) Uma padaria prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de oito tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite, mandioca, laranja e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando cada tamanho com cada sabor?
Arranjo:
3) Maurício, Tânia e André formam a comissão de eventos da escola. Eles precisam escolher entre eles um presidente e um vice. De quantas formas diferentes poderemos ter essa escolha?
4) Em um concurso de beleza organizado pelo bairro, quatro meninas (Bruna, Roberta, Helena e Bianca) são as finalistas. De quantas maneiras distintas podemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada?

Trabalhou-se da seguinte forma: foi resolvido com os alunos (no quadro-negro) o primeiro problema, havendo destaque para os *invariantes* do mesmo. Após esse momento, pediu-se que eles respondessem, individualmente, ao segundo problema. Dado o tempo para a resolução, foi feita a discussão também no quadro, estimulando sempre a participação da turma. O processo foi repetido durante a resolução do terceiro problema. Primeiro os alunos responderam de modo mais individual e depois ocorreu a resolução em conjunto, no quadro. A seguir é possível visualizar o que se destacou na intervenção com cada um dos significados combinatórios no estudo analisados.

A *listagem das possibilidades* foi a primeira orientação e a estratégia trabalhada nas intervenções. Foi destacada também a *sistematização*, um dos pilares adotados, sendo trabalhado da seguinte forma: sempre que se iniciava a resolução de um problema no quadro, era dada a sugestão de que tal escrita fosse feita de forma organizada. Para a "organização", sugeriu-se a *sistematização*, de modo que a ordem na qual os elementos aparecessem no enunciado fosse o ponto de partida no momento de escrever as possibilidades, o que tornava a resolução mais fácil, visto que a probabilidade de confundir os elementos seria menor.

<u>Produto Cartesiano</u> - *A mãe de Pedrinho fez oito tipos de suco (maracujá, laranja, acerola, goiaba, uva, manga, abacaxi e caju) para a comemoração do dia das crianças na escola do seu filho. Ela levou copos descartáveis de quatro cores (amarelo, branco, cinza e preto). Quantas combinações diferentes poderão ser formadas, combinando todos os sucos com todos os copos?*

Focou-se nos *invariantes*, destacando o fato de que existiam dois grupos (sucos – oito tipos, e copos – quatro cores) e que para formar as combinações possíveis, seria necessário retirar um elemento de cada grupo, formando assim um terceiro conjunto. Além disso, questionou-se os alunos sobre a ordem exercer ou não influência, levando-os a refletir sobre o fato de que, nesse tipo de problema, formadas as combinações, a ordem não gera novas possibilidades. Utilizou-se a exemplificação de uma primeira combinação: dizer que temos a combinação suco de maracujá e copo amarelo é o mesmo que dizer que temos a combinação copo amarelo e suco de maracujá. A ordem na qual os elementos estão dispostos não exerce influência na resolução desse tipo de problema combinatório.

Para destacar a *generalização*, chamou-se atenção para o fato de que se para cada tipo de suco disponível havia a possibilidade de combinação com quatro cores diferentes de copos, e que existiam 8 tipos de sucos, a multiplicação 4x8 responderia ao problema.

<u>Arranjo</u> – *Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?*

Visando à percepção dos *invariantes*, chamou-se a atenção para o fato de que nesse tipo de problema é fornecido um grupo e desse grupo são retirados elementos para formar subgrupos.

Perguntou-se também se as combinações "Joana e Vitória" e "Vitória e Joana" eram diferentes, o que, de certa forma, levava os alunos a refletir sobre um dos invariantes dos problemas de Arranjo, que diz que a ordem na qual os elementos forem dispostos gera novas possibilidades.

Sobre a *generalização*, os alunos eram levados a perceber quantas vezes cada um dos elementos poderiam ser colocados em primeiro lugar (como prefeitos, no caso). Assim, chegando-se à conclusão de que cada um deles poderia ocupar o primeiro lugar, com segundos lugares (vices) diferentes, por duas vezes, e que a quantidade de elementos era de três, sendo uma possível solução para o problema a multiplicação 2x3, que resulta na resposta seis possibilidades.

Com o GC, outra turma do 5º ano do Ensino Fundamental, foram trabalhados problemas de raciocínio lógico e problemas multiplicativos de modo geral e não especificamente os combinatórios. O objetivo era de comparar um trabalho mais direto com problemas combinatórios com um trabalho indireto, ou seja, uma intervenção em que se trabalham problemas multiplicativos de um modo geral, incluindo um tipo de problema combinatório, o Produto Cartesiano, para verificar se esse trabalho indireto, com problemas multiplicativos, de um modo geral seria suficiente para que os alunos compreendessem a Combinatória.

4. Análise dos Resultados

Para este estudo, foi feito o levantamento acerca dos acertos totais dos alunos nas resoluções dos problemas de Produto Cartesiano e Arranjo, tanto no pré-teste como no pós-teste do GE e GC. Nos Quadros 1 e 2 apresentam-se os acertos totais dos alunos no pré-teste e no pós-teste do GE, de modo que seja possível perceber os avanços advindos com os momentos de intervenção.

Nas Tabelas 1 e 2, apresenta-se a comparação entre os percentuais de acertos no pré-teste e pós-teste do GE e do GC, de modo que seja possível comparar os avanços dos alunos em cada um dos grupos e verificar se, de fato, a intervenção com problemas combinatórios, utilizando-se estratégias bem sucedidas desenvolvidas por alunos, é válida para a aprendizagem, não sendo suficiente apenas o trabalho com as Estruturas Multiplicativas de um modo geral para a aprendizagem de tais problemas.

Quadro 1: Acertos Totais por aluno do Grupo Experimental no Pré-teste

Alunos	Problemas				Total de Acertos
	PC[2]	PC+	Arr-	Arr+	
Aluno 1					0
Aluno 2	X				2
Aluno 3	X				2
Aluno 4					0
Aluno 5					0
Aluno 6					1
Aluno 7					0
Aluno 8					0
Aluno 9					0
Aluno 10	X				1
Aluno 11					0
Aluno 12					0
Aluno 13					0

Quadro 2: Acertos Totais por aluno do Grupo Experimental no Pós-teste

Alunos	Problemas				Total de Acertos
	PC-	PC+	Arr-	Arr+	
Aluno 1	X				1
Aluno 2	X		X		2
Aluno 3	X	X	X		5
Aluno 4		X			2
Aluno 5	X	X	X		4
Aluno 6					1
Aluno 7	X	X	X	X	6
Aluno 8	X	X	X		4
Aluno 9	X	X			3
Aluno 10	X	X	X		5
Aluno 11		X			1
Aluno 12					0
Aluno 13	X	X			3

Tabela 1: Comparação do Percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste (GE)

	PC-	PC+	Arr-	Arr+
Pré-teste	23,07	0	0	0
Pós-teste	69,23	69,23	46,15	7,69

Tabela 2: Comparação do Percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste (GC)

	PC-	PC+	Arr-	Arr+
Pré-teste	25	6,25	0	0
Pós-teste	6,25	0	0	0

[2] PC- = Produto Cartesiano com número menor de possibilidades; PC+ = Produto Cartesiano com número maior de possibilidades; Arr- = Arranjo com número menor de possibilidades; Arr+ = Arranjo com número maior de possibilidades.

A partir dos dados apresentados, (mais especificamente Quadros 1 e 2 e Tabela 1) é possível perceber importantes avanços no que se refere ao ensino-aprendizagem de Combinatória quando o conteúdo é trabalhado de forma sistemática em sala de aula, o que demonstra que os pilares adotados durante as intervenções parecem contribuir de forma importante para que os alunos compreendam e melhor reflitam sobre os problemas de Produto Cartesiano e Arranjo. É possível perceber que alunos que antes apresentavam baixos níveis de acertos totais, passaram a solucionar de forma correta os problemas propostos.

Já com os resultados apresentados no GC, pode-se perceber que as intervenções realizadas apenas com Problemas de Estruturas Multiplicativas de um modo geral parecem não ser suficientes para que os alunos compreendam a Combinatória. Nesse grupo, diferentemente do GE, os resultados apresentados no pré-teste apresentam-se melhores do que aqueles encontrados no pós-teste. Hipótese para tal é a de que os alunos, após as intervenções, tenham adotado uma operação (no caso, a adição), para resolver a maioria dos problemas. É possível questionar o porquê de os alunos terem optado por resolver os problemas através da adição e não pela multiplicação, sendo esta o foco da intervenção no GC. Hipótese para tal é a de que eles, por julgarem a adição como de mais fácil resolução, tenham optado por ela, que também foi utilizada durante as intervenções, uma vez que na resolução de multiplicações muitas vezes eles optaram pelo uso da adição de parcelas repetidas e não pela multiplicação.

Com a análise realizada a partir dos resultados obtidos com o GE, com o qual foram trabalhados problemas de Combinatória, especificamente Produto Cartesiano e Arranjo, pode-se perceber os avanços discutidos a seguir.

Em relação ao Produto Cartesiano, no pré-teste, apenas três alunos (alunos 2, 3 e 10) apresentaram acertos totais, todos no problema que levava a um número menor de possibilidades. É importante destacar que dentre os quatro tipos de problemas combinatórios, os de Produto Cartesiano são considerados, a partir de estudos anteriores como o de Pessoa e Borba (2009b), como os de mais fácil resolução. As autoras dizem que este melhor desempenho pode, em parte, ser atribuído ao ensino das escolas, que desde o 3º ano do Ensino Fundamental trabalham, em geral, problemas do tipo Produto Cartesiano. Com os resultados apresentados no pós-teste, após as intervenções, é possível perceber importantes avanços no que se refere à compreensão dos problemas de Produto Cartesiano. No problema que levava a resposta com um número menor de possibilidades, de três resoluções corretas (no pré-teste), passaram a haver nove, sendo este dado indicador de que os alunos, que já apresentavam alguma compreensão, ainda que com poucos acertos totais, evoluíram após as intervenções, compreendendo e utilizando, em partes, os pilares que foram trabalhados. No problema que levava a resposta com um número maior de possibilidades, os alunos avançaram de zero para nove resoluções corretas, sendo este também um dado importante.

No estudo maior, do qual a presente análise foi recortada (Santos e Pessoa, 2012), os demais significados combinatórios com respostas que levavam a um número maior de possibilidades, apresentaram baixa quantidade de acertos totais. O único significado que apresentou grande quantidade de acertos totais (com respostas que levavam a um número maior de possibilidades) foi Produto Cartesiano, sendo tal resultado já esperado, uma vez que apenas este tipo de problema é trabalhado desde os anos iniciais pela maioria das escolas, o que facilita a sua compreensão. Com os demais problemas, sem haver um trabalho mais sistemático e contínuo em sala de aula, é mais difícil para os alunos chegarem ao esgotamento das possibilidades, tendo em vista a maior quantidade de elementos a serem combinados na formação das possibilidades. Ainda que durante as intervenções tenha sido trabalhada a generalização, é necessário um trabalho contínuo, de modo que, com o tempo, os alunos passem a apropriar-se e a com mais frequência utilizar tal estratégia de resolução.

Nos problemas de Arranjo, não houve acertos totais no pré-teste, ou seja, nenhum dos alunos esgotou as possibilidades no que se refere à resolução deste tipo de problema. Já no pós-teste, é possível perceber, a partir do Quadro 2, que no problema que levava a um número menor de possibilidades, passou de zero para seis o número de resoluções corretas. Já no problema que levava a um número maior de possibilidades, só houve um acerto total, no pós-teste. Como dito anteriormente, é mais difícil esgotar as possibilidades quando a grandeza numérica é maior, além de que este tipo de problema, bem como os de Combinação e de Permutação, não fazem parte do cotidiano dos alunos dos anos iniciais, o que acredita-se que dificulta a compreensão. Pessoa e Borba (2007), em um estudo com 99 alunos do 2º ao 5º ano resolvendo problemas combinatórios, dizem que é perceptível que os acertos ocorrem, em sua maioria, com os problemas cuja grandeza numérica é pequena, porque as estratégias que os alunos utilizam neste nível de ensino ainda são bem longas e detalhadas; eles ainda não dominam as fórmulas e assim se utilizam da forma de resolução que melhor se encaixa nas suas possibilidades de resolver e compreender o problema. Do mesmo modo, no estudo atual, apesar de ter sido trabalhada a *generalização*, sendo esta um dos pilares das intervenções, é preciso um trabalho sistemático e contínuo, não sendo totalmente eficaz apenas uma intervenção com a citada estratégia.

No presente estudo, além de apresentados os resultados encontrados a partir da resolução de problemas de Produto Cartesiano (já tidos como de mais fácil resolução por estudos anteriores, e, de fato, sendo ratificado como o significado que apresentou o maior avanço tanto com respostas que levavam a um número menor como maior de possibilidades), foram apresentados os resultados encontrados a partir da resolução dos problemas de Arranjo, o que demonstra que os alunos dos anos iniciais são capazes de responder a outros tipos de problemas Combinatórios, bastando que sejam colocados diante de situações-problema de diversos tipos e que haja ensino específico para tal.

5. Considerações Finais

Os resultados encontrados permitem perceber que os alunos dos anos iniciais são capazes de compreender e solucionar problemas combinatórios de diversos tipos. Além disso, as intervenções possibilitaram a compreensão de que eles, tendo subsídios para tal, são capazes de esgotar as possibilidades, inclusive com problemas que levam a um número maior de possibilidades, sendo tal construção paulatina.

É preciso pensar que se com apenas uma intervenção para cada um dos significados combinatórios analisados os alunos já apresentaram avanços e compreensão dos invariantes, com o trabalho cotidiano e a discussão dos problemas combinatórios presentes em sala de aula efetivamente, os alunos só têm a ampliar suas estratégias e compreensão, passando, inclusive, a resolver com maior facilidade os problemas cujas respostas levam a um número maior de possibilidades, exigindo estas uma maior elaboração na listagem das possibilidades.

Tais fatores ratificam a hipótese inicial de que é preciso um trabalho sistemático, com ênfase nos invariantes, estando aqui inclusas as diferenças e semelhanças entre cada um dos problemas Combinatórios, nas possíveis estratégias que podem vir a facilitar as resoluções e na generalização para que os alunos obtenham uma maior compreensão acerca da Análise Combinatória.

O estudo indica ainda a necessidade de que intervenções com problemas que envolvam o raciocínio combinatório se façam presentes no cotidiano das salas de aula, de modo que os alunos possam a cada dia aprimorar suas estratégias de resolução, melhor compreendendo os problemas.

6. Referências

INHELDER, Barbara & PIAGET, Jean. **De la logique de l'enfant à la logique se l'adolescent**. Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

MATIAS, Patrícia Carvalho; SANTOS, Missilane Michele de Souza; PESSOA, Cristiane. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de Arranjo. In: **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Recife, 2011, pp. 1-12.

MIGUEL, Maria. Inez. & MAGINA, Sandra. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. In: **Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** Santos, 2003.

MORO, Maria Lúcia Soares; SOARES, Maria Teresa Carneiro; CAMARINHA, Jomar Antonio. Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano. **Zetetike** (UNICAMP), v. 18, p. 211-242, 2010.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. Estratégias de Resolução de problemas de Raciocínio combinatório por alunos de 1ª a 4ª série. In: **Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – II SIPEM, Maceió, 2007, pp. 1-19.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório dos anos iniciais aos finais da escolarização básica. In: **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática -** IV SIPEM, 2009, Taguatinga – DF, 2009a. p. 1-21.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. ZETETIKÉ (UNICAMP), Campinas, v. 17, n. 31. 2009b. http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike1/article/view/2622/2364. Acesso em 05/09/2012.

PESSOA, Cristiane. & SANTOS, Laís Thalita Bezerra dos. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? In: **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Recife, 2011.

SANTOS, Laís Thalita Bezerra dos e PESSOA, Cristiane. Estratégias bem sucedidas desenvolvidas por alunos: ponto de partida para o ensino da Combinatória no 5º ano do Ensino Fundamental. In: **Anais do XX Congresso de Iniciação Científica da UFPE**, 2012 "no prelo".

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David & SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

SOARES, Maria. Teresa. & MORO, Maria Lúcia. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. In: **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Águas de Lindóia, SP, 2006.