



**ÂNGULOS EM MOVIMENTO:  
UMA ABORDAGEM DE ENSINO COM O GEOGEBRA**

**TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO E EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA – GT 06**

**RESUMO**

Este artigo trata de um estudo a partir de um trabalho monográfico de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática da UFPB/Campus IV, que teve como objetivo principal trazer ao professor de Matemática uma abordagem sobre o ensino de Ângulo em paralelo com o uso do *software* GeoGebra e verificar a aceitação e a viabilidade desta proposta, por parte dos professores. Para isso, foi montada uma Oficina Pedagógica contendo três atividades que proporcionassem ao professor ter uma sequência didática para o ensino de Ângulo. Os resultados apontaram uma necessidade dos professores em se qualificar no ensino de Geometria, além de se qualificar nas mídias que promovem melhor compreensão dos conteúdos matemáticos.

Palavras-chaves: Ensino de Geometria, Ângulos, GeoGebra.

**1. INTRODUÇÃO**

Este artigo vem mostrar um estudo de trabalho de conclusão de curso, feito com professores de matemática para abordagem do ensino do conceito de Ângulos com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra. Neste estudo, encontramos ao longo da história de ângulos, publicados por matemáticos de diferentes gerações e também em abordagens apresentadas nos livros didáticos da atualidade, por diferentes autores, várias formas de abordagens e representações para o ensino do conceito de ângulos, e foi a partir daí que, considerando as orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de como direcionar o estudo da geometria no Ensino Fundamental com o uso das tecnologias em sala de aula, que procuramos proporcionar ao aluno, com o uso deste *software*, um aprendizado sólido e significativo para melhor compreensão do conceito de Ângulos.

Baseados na problemática do ensino da Geometria que vem sendo caracterizado, em sua maioria, por abordagens prontas, apresentadas de maneira a não proporcionar ao aluno a construção de um aprendizado conceitual reflexivo, especificamente no que se refere ao ensino do conceito de Ângulos, não apresentando atividades em sala de aula que leve o aluno a essa construção, e nem o apresentando a recursos tecnológicos de grande valia para o seu aprendizado, como as ferramentas de um *software* educativo, que oferece grandes condições de levar tanto ao professor como ao aluno uma maneira mais dinâmica e atrativa para a



compreensão desse conceito que criamos uma sequência de atividades com o uso do *software* GeoGebra, onde é possível esclarecer, através do movimento realizado com as ferramentas que este *software* oferece, conclusões errôneas no que se refere ao conceito de Ângulo.

O objetivo principal de nossa pesquisa foi apresentar uma abordagem diferenciada acerca do ensino da ideia de ângulo e de buscarmos incentivar nos professores uma reflexão acerca da prática docente ainda existente para o ensino da Geometria. Para isso, em nossa pesquisa, apresentamos três atividades que trazem tabelas, cada uma, com instruções passo-a-passo para construções das figuras e de como proceder no *software* GeoGebra, seguidas de questionamentos que promovem reflexões a respeito das mesmas, possibilitando aos alunos um aprendizado diferente sobre o conteúdo de Ângulo.

Essas atividades, que se caracterizam como uma sequência metodológica didática para uma abordagem no ensino do conceito e das relações entre Ângulos, permitindo que o professor leve à sala de aula uma forma dinâmica de apresentar um conteúdo importante como Ângulos, de maneira diferenciada, onde o aluno tem a oportunidade de construir alguns conceitos e propriedades da Geometria, e ao mesmo tempo, se valer do uso das ferramentas que um *software* de geometria dinâmica oferece, permitindo ao aluno experimentar hipótese promovendo uma aprendizagem significativa e validada em demonstrações.

O *software* GeoGebra, utilizado para as construções geométricas, é um *software* livre, de fácil manuseio e instalação e que ocupa pouco espaço físico do computador. Considerado um dos melhores *softwares* educativos, ele é muito usado para validar demonstrações de Cálculo, Álgebra e Geometria, pois traz ao aprendizado da matemática cor, movimento e clareza nas manipulações, ao permitir em seu manuseio a confirmação de características das figuras planas dificilmente mostradas em papel e lápis.

A partir das construções das figuras, realizadas nas atividades, feitas no GeoGebra, verificou-se o comportamento obtido entre os ângulos quando se traça segmentos perpendiculares e paralelos a uma reta. Essas construções proporcionam ao professor levar ao aluno a visão de compreender as relações entre ângulos, identificando-os quando são: Consecutivos, Adjacentes, Opostos pelo Vértice, Correspondentes, Colaterais Internos, Colaterais Externos, Alternos Internos e Alternos Externos, além de compreender os conceitos dos diversos tipos de Ângulos, como: Ângulos Complementares, Ângulos Suplementares, Ângulo Reto e Ângulo Raso.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

O conceito de ângulo foi sendo construído ao longo do tempo por matemáticos com base nas aplicações feitas em experimentos e simulações, verificando a diversidade de situações em que ele se aplica e as propriedades comuns que essas situações se inserem até os dias atuais. Babilônios e egípcios não formaram conceitos sobre a ideia de Ângulo, mas deixaram algumas contribuições.

Mas foi com Tales de Mileto (século VI a.C.) que se formou a mais conhecida noção do que é ângulo, a que a maioria dos professores de matemática atualmente conhece. Conta-se que para medir a pirâmide do Egito, Quéope, Tales escolheu um determinado momento em que a sombra da pirâmide tivesse comprimento igual ao da vara que estava fincada perpendicularmente ao chão. Daí, ele pediu a um colaborador que apressadamente fizesse a medição da sombra e concluiu que a altura da pirâmide era igual ao comprimento da mesma conforme a figura abaixo.



Figura 1: noção de ângulo.

Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/tales.htm>

Com isso, Tales teve o raciocínio de que para afirmar a altura da pirâmide os raios solares teriam que incidir numa inclinação de  $45^\circ$ , o que numa representação mais simples é:

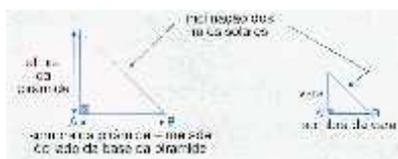


Figura 2: representação do cálculo da altura da pirâmide

Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/tales.htm>

Assim, os triângulos são semelhantes por terem ângulos iguais e seus lados proporcionais.

Muitos foram os matemáticos que contribuíram com os estudos sobre o conceito de Ângulo; não só Tales de Mileto, mas também outros, em diferentes épocas, deram sua contribuição no estudo de ângulos, com base no rigor que a matemática exige. Dentre eles, podemos destacar alguns (LORENZONI, 2003):

Aristóteles (384-322 a.C.) definiu ângulo como uma deflexão ou quebra de linhas. Euclides (c. 300 a.C.) em sua obra, ‘Elementos’, apresenta uma definição que será usada por vários autores: “Ângulo plano retilíneo é a inclinação recíproca de duas linhas retas que se encontram e não estão em direitura uma com a outra.”

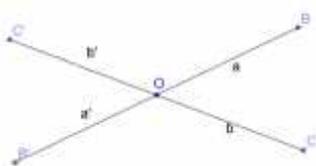
Com base nos conceitos apresentados, foi que em 1893, H. Schotten apresentou três classificações para ângulos (LORENZONI, 2003, p. 11):

1. O ângulo é a medida da rotação necessária para se levar um de seus lados para o outro sem tirá-lo do plano que os contem.
2. O ângulo é a diferença de direção entre duas retas.
3. O ângulo é a porção de um plano limitado por duas retas que se encontram em um ponto

Cristiano Ottoni (1904), em sua obra “Elementos de Geometria e Trigonometria Retilínea”, define:

Duas retas AB e CD que se cortam, dividem a extensão indefinida do plano que eles determinam em quatro porções distintas, as quais se dá o nome de ângulo. Assim, chama-se ângulo a porção de um plano limitado em parte por duas linhas que se encontram. (OTTONI, 1904, p.8 *apud* LORENZONI, 2003, p.11).

Figura 3, ideia de ângulo.  
Fonte: adaptado de OTTONI  
2003, p.11)



(1904, p.8 *apud* LORENZONI,

Há também outros matemáticos que trazem diferentes definições de Ângulo. Giuseppe Veronese (1953) define que: “Chamamos de ângulo uma parte de um feixe de raios limitados por dois raios (assim como um segmento é uma parte de uma reta limitada por dois pontos)”. Já a opinião de Lorenzoni (2003), a respeito



da contribuição de Francisco Vilela Barbosa, conhecido como Marquês do Paranaguá, Matemático do século XVIII que publicou a obra “Elementos de Geometria”, que teve seis edições, de 1815 a 1870, é considerada a melhor definição de Ângulo. Nela, o Marquês apresentou noções gerais de geometria e introduziu, também, a ideia de grau.

Assentaram em repartir a circunferência do circulo em 360 partes eguaes, a que deram o nome de graus; cada um destes em 60 partes eguaes, a que chamaram minutos; cada minuto em outras 60 partes eguaes, a que chamaram segundos; e assim foram sucessivamente subdividindo, dando a estas subdivisões de 60 em 60 os nomes de minutos, segundos, terceiros. (PARANAGUÁ, 1846, p.7 *apud* LORENZONI, 2003, p.20).

Já para a definição de ângulo, ele afirma:

Duas rectas, que concorrem em um ponto, estão ambas num mesmo plano; e se diz que fazem ângulo. E formarão sempre um sector, descrevendo-se com qualquer raio do ponto de concurso, como centro, um arco que nelas termine. Assim a um ângulo corresponde um arco de circulo; e reciprocamente. Em geral se diz que fazem ângulo duas linhas que concorrem em um ponto (...) e conforme estas são, rectas ou curvas, ou uma recta e uma curva, se lhe dá o nome de ângulo rectilíneo, curvilíneo ou mixtilíneo. (PARANAGUÁ, 1846, p.8 *apud* LORENZONI, 2003, p.20)

## **2.1 O ensino de Ângulos segundo os PCN e os Livros Didáticos**

É necessário que a construção da aprendizagem matemática esteja fundamentada em significados, estratégias e resoluções de problemas para o desenvolvimento dos processos indutivos, dedutivos e lógicos do aluno, oportunizando-lhe analogias com o mundo real.

Entre os objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais, destacam-se:

- ✓ Utilizar diferentes linguagens – verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- ✓ Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos (BRASIL, 1998, p.7-8).

E seguindo a linha dos objetivos iniciais deste documento, que ressalta o uso de diferentes linguagens e diferentes tecnologias, que defendemos, também, a introdução dos recursos tecnológicos nas aulas de matemática, mesmo sabendo que estes recursos ainda estão

em processo de inserção na maioria das escolas no país. Contudo, eles podem ser usados com várias finalidades, como ressaltam os próprios PCN:

- ✓ Como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino aprendizagem;
- ✓ Como auxiliar no processo de construção do conhecimento;
- ✓ Como meio para desenvolver autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
- ✓ Como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados, etc (BRASIL, 1998, p.44).

Em paralelo a isso, o conceito de Ângulo tratado nos livros didáticos vem, em sua maioria, abordando a ideia inicial de como encontrá-lo, ou seja, fazendo analogias a figuras e objetos do cotidiano, para assim, de uma forma intuitiva, introduzir o seu conceito, construindo-o a partir de comparações. Alguns autores iniciam a sua abordagem utilizando-se das formas encontradas em objetos para depois representá-la numa figura. Mesmo apresentando diferentes conceitos, onde alguns autores tratam ângulo como ‘região’ e outros como ‘reunião de semirretas’, e outros como ‘giro’, num ponto alguns deles convergem: a forma geométrica de representação do mesmo.

Ao afirmar que Ângulo é uma região entre duas semirretas de mesma origem, nos faz refletir que nome daríamos a região externa a essas semirretas, e mais, estaríamos desprezando a figura de uma circunferência que já sabemos que mede 360 graus, por nos lembrar da ideia de uma volta completa.

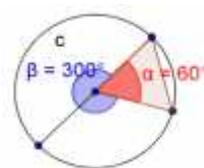


Figura 4, ideia de ângulo representada numa circunferência

Assim, consideremos então, a figura abaixo, onde duas semirretas que se cruzam num mesmo ponto, formando quatro regiões num plano podem ser chamadas de ângulo, nos deixando esclarecidos o seu conceito, não permitindo que haja outras interpretações.

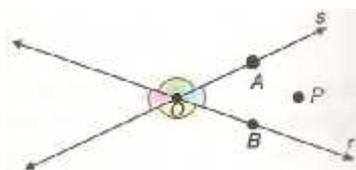




Figura 5, representando a ideia de Ângulo.  
Fonte: Projeto Araribá (2006, p.47).

## 2.2 O uso de *softwares* no ensino de geometria

Desde que a discussão acerca da inserção do uso de computadores nas aulas de matemática passou a ser foco em palestras, congressos e seminários na área de Educação Matemática que pesquisadores e professores têm voltado seus estudos no interesse em promover o uso dessas máquinas como aliados no ensino/aprendizagem. Pioneiros nesta área defendem o uso de computadores nas aulas de matemática por acreditarem que os recursos utilizados através deles, como softwares, editores de texto, planilhas e jogos, apresentam características que podem favorecer o processo de ensino/aprendizagem, pois a escola e o governo definem os currículos e as mídias em função daquilo que acreditam ser necessário para a educação do indivíduo, para assim, ele ingressar numa atividade profissional (KENSKI, 2007).

Valente (1995) afirma que o computador pode ser um importante recurso para promover a passagem da informação ao usuário ou facilitar o processo de construção de conhecimento. E enfatiza que a escolha de um *software* deve partir deste contexto, para que realmente essa construção seja promovida de maneira objetiva, sem prejudicar ou interferir no pensar do aluno.

Os programas de computador acrescentam velocidade, cor, clareza visual e uma variedade de outras características interessantes, e isto é promovido através de *softwares* educativos que são projetados para o ensino e que podem oferecer uma valiosa contribuição ao currículo matemático. Ao selecionar qualquer ferramenta computadorizada ou *software* educativo é importante avaliá-lo adequadamente (VAN DE WALLE, 2009).

É importante ressaltar qual o objetivo do professor ao utilizar um *software* em suas aulas, para que de posse disto ele possa estabelecer uma relação coerente do recurso tecnológico com o conteúdo trabalhado em sala de aula. Por exemplo, para utilizar da mídia para validar as demonstrações e os conceitos apresentados nos livros didáticos. Também é de



extrema importância estabelecer critérios na escolha do *software*, que vão desde o seu manuseio até a metodologia deste no envolvimento do conteúdo abordado e também no fácil acesso de instalação, para que o aluno possa fazer suas consultas também nos exercícios de casa. É necessário ter consciência de que o uso de um *software* é para contribuir com a aprendizagem e não, necessariamente, substituir as aulas e a abordagem do professor em sala, promovendo também atividades paralelas ao uso do computador, lembrando que o professor é agente principal nessa mediação, pois o mesmo é que será capaz de identificar se o aluno aprendeu o conteúdo ou apenas aprendeu a manipular o *software*.

E dentro desta linha de pensamento e em qualquer nível de ensino da Matemática que devemos promover e instigar os professores para fazer uso da informática em suas práticas, pois ela auxilia na compreensão dos conceitos básicos e também na assimilação dos conteúdos, e tem sido ingrediente central no processo de mudança no ensino da matemática por causarem um impacto significativo.

### **2.3 Aplicação e desenvolvimento das atividades**

O estudo caracterizou-se em uma pesquisa descritiva, por descrever e caracterizar detalhes de um problema, conforme Fiorentini & Lorenzato (2006, p. 70), nesse tipo de pesquisa geralmente utiliza-se “a aplicação de questionários padronizados, a partir de categorias previamente definidas”. Dessa forma, em nosso estudo utilizamos questionários padronizados compostos de questões fechadas, abertas e mistas.

Foi elaborada pela pesquisadora uma Oficina Pedagógica que foi realizada com a participação de cinco professores que atuam no ensino de matemática em escolas da rede municipal de Ensino Fundamental nas cidades de Rio Tinto e Marcação, no Estado da Paraíba, que identificamos como Prof. 1, Prof. 2, Prof. 3, Prof. 4 e Prof. 5, na qual apenas três deles estão efetivamente cursando Matemática, e destes, dois já tem formação em outra área de ensino. Quatro deles já atuam há mais de dez anos em sala de aula. Esta oficina ofereceu três atividades com o objetivo principal de apresentar uma abordagem para o ensino de Ângulo, por meio da utilização do *software* de geometria dinâmica GeoGebra. As atividades foram aplicadas no laboratório de informática do CCAE/UFPB/Campus IV, onde cada professor recebeu uma pasta contendo o Questionário Diagnóstico, o módulo com as três

atividades e o Questionário Avaliativo, nesta ordem. Cada professor tinha acesso a um computador, onde já se encontrava instalado o *software* GeoGebra.

A Atividade 1, que teve o objetivo de trazer a ideia inicial de Ângulo, promoveu a construção de uma figura, seguida de questionamentos, onde cada um, individualmente, respondia de acordo com os manuseios realizados na mesma, embora alguns, antes de escrever suas respostas, perguntavam a pesquisadora se estavam certos, e esta ressaltava que o que importava mesmo era a realização da atividade e que, inicialmente, eles não se preocupassem se estavam certos ou não.

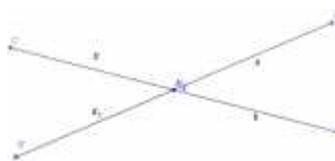


Figura 6: construção da Atividade 1.

A Atividade 2, que trouxe a construção de uma figura que mostrasse a ideia do que são Ângulos Complementares e Ângulos suplementares, onde já foi verificado mais independência dos professores para a realização desta construção, pois eles já sabiam onde buscar as ferramentas solicitadas, mas o que ainda persistia para alguns, era o manuseio do *mouse*, por se tratar de ‘cliques’ delicados e de qual botão apertar: se o direito ou o esquerdo. Esse procedimento com os botões do *mouse* promovia ‘confusão’, ocasionando em o professor dizer que a sequência proposta na tabela da atividade, não determinava tal figura, fazendo com que a pesquisadora tivesse que fazê-lo retornar ao início das instruções acompanhando-o no passo a passo da construção.

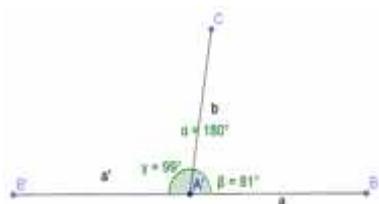


Figura 7: construção da Atividade 2.

Já a Atividade 3, exigiu um pouco mais dos professores, por se tratar de uma construção mais detalhada, pois esta promovia todas as relações entre ângulos, trazendo a

visualização da ideia de Ângulos Correspondentes, Ângulos Alternos Internos e Alternos Externos, Ângulos Colaterais Internos e Colaterais Externos.

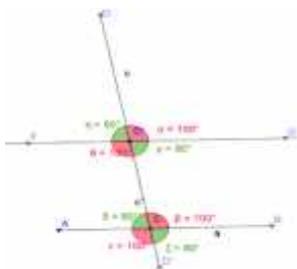


Figura 8: construção da Atividade 3.

### 3. DADOS E RESULTADOS

A análise qualitativa do estudo foi baseada nas respostas obtidas dos questionários e do módulo de atividades, de modo que interpretássemos se o objetivo da abordagem apresentada para o ensino de Ângulo seria aceita pelos professores.

De início, enfrentamos a problemática em reunir os professores da cidade de Mamanguape/PB para esta pesquisa, onde contávamos com um número de dez professores que não se disponibilizaram a participar da Oficina Pedagógica, por motivos diversos. Com isso, vemos que a disponibilidade em conhecer novidades no ensino da matemática não é tão atrativa quanto se imaginava, e isso dificultou muito o nosso estudo. Posteriormente, marcamos a Oficina com um grupo de oito professores da cidade de Rio Tinto/PB, que já participavam de uma Formação Continuada com uma professora do curso de Licenciatura em Matemática da UFPB/Campus IV, por meio do PROLICEN 2011, e solicitamos um encontro com estes, e ocorreu que apenas quatro deles compareceram a Oficina Pedagógica, e então convidamos um professor da rede pública municipal da cidade de Marcação/PB que se encontrava disponível no momento e que é aluno do curso de Licenciatura em Matemática.

Sabendo que quatro destes professores já atuavam no ensino de matemática, com formação em outra disciplina, conforme dados do Questionário Diagnóstico, é possível imaginar o quanto fica comprometido o ensino de matemática, com atuações baseadas, na maioria das vezes, em planejamentos descontextualizados e de metodologias pouco atrativas,



promovendo uma inibição em expor a vivência adquirida no decorrer dos anos com o ensino da matemática.

Com relação às indagações do Questionário Diagnóstico, observamos o quanto de insegurança há na formulação do conceito de Ângulo, nosso foco principal de estudo, até mesmo pela surpresa em um dos professores, que atualmente cursa matemática e não se colocou nesta questão, não apresentando também, nenhuma justificativa para a sua omissão.

Nas questões do módulo de atividades, foi possível verificar com mais clareza esta insegurança. Mesmo atuando há mais de dez anos no ensino de Matemática, que é o caso de quatro professores, notamos a dificuldade em visualizar as regularidades encontradas nos manuseios das figuras construídas no GeoGebra, onde eram indagadas questões de características entre os ângulos, em que os professores tiveram constrangimento em responder, pois perguntavam a pesquisadora se estavam certos ou não nas suas respostas, antes que eles a passassem para o papel.

A Atividade 3 do módulo, que promovia um encadeamento maior de relações angulares, foi a única atividade em que houve questões não respondidas, o que muito nos surpreendeu, pois seria um momento de solicitar a orientação da pesquisadora, o que não aconteceu. Observamos com isso, que há pouca interação com o ensino da Geometria, mas especificamente com alguns conceitos geométricos que foram pertinentes nas atividades.

Podemos atribuir a isso talvez ao fato da não formação na área de Matemática, o que leva os professores a terem insegurança e inibição em se pontuar diante dos questionamentos propostos, uma vez que eles ainda não se sentem preparados para posicionar suas opiniões diante das regularidades encontradas nos conteúdos matemáticos, o que seria comum a aqueles que possuem formação na área.

Em relação ao uso do computador, vimos que, todos desconhecem atividades em paralelo com o uso de *softwares* educativos, e mais ainda, que independente de ter ou não esses recursos na escola, a maioria dos professores não tem habilidades com o uso do computador. Além disso, também no que se refere, especificamente ao *software* GeoGebra, observamos a empolgação de alguns ao término das construções produzidas, explorando todo o movimento possível que o ambiente proporcionava e vimos que, apesar dos professores pontuarem a ferramenta virtual como um ótimo meio para um melhor entendimento na aprendizagem e as atividades como claras e objetivas com o uso do mesmo, verificamos que a



falta de conhecimento com as ferramentas do *software* e a falta de infraestrutura na escola dificultaria a realização desta metodologia em suas aulas, o que para nós, não atinge o objetivo de saber, num futuro estudo, quais mudanças essa abordagem promoveu em suas práticas.

Assim, concluímos que, de uma forma geral, os professores analisados necessitam de formação adequada para adquirir os conhecimentos básicos para inserir *softwares* educativos em suas práticas de ensino, e assim, utilizar de uma metodologia que faça uso de ferramentas computacionais, uma vez que, a maioria tem necessidade em se aprimorar para o uso de funções básicas do computador e também da efetiva formação em Matemática, e conseqüentemente obter uma maior e mais profundo conhecimento de ambientes virtuais em paralelo com os conteúdos matemáticos, de uma forma geral.

#### 4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARARIBÁ, Projeto. **Matemática**. 1ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª séries: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

FIORENTINI, Dario. LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LORENZONI, Claudia A. C. de Araújo. O Ângulo na Geometria Elementar: Diferentes Concepções ao Longo do Tempo. In: NOBRE, Sérgio (org.). **Coleção História da Matemática para Professores**. São Paulo: Sociedade Brasileira de História Matemática, 2003. (Preprint)

KENSKI, Vani Moreira. Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papirus, 2007.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula**. Porto Alegre: Artmed, 2009.