PIRANDO COM BUFFON: RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA PARA APROXIMAÇÃO AO NÚMERO π

Luana Caroline Junges [1]
Leandro Wrzecionek de Brito [2]
Renato Francisco Merli [3]

RESUMO

Este artigo relata o desenvolvimento de uma oficina para estudantes do Ensino Fundamental II utilizando o experimento da Agulha de Buffon para obter aproximações do número π, destacando o estudante como protagonista do processo de aprendizagem. Para tanto, abordou-se uma introdução à Geometria Probabilística, apresentou-se o contexto histórico, partindo para a execução física do experimento da Agulha de Buffon, com posterior simulação de milhares de lançamentos utilizando o GeoGebra, seguida de uma investigação do problema. Houve uma prévia da oficina com licenciandos do curso de Licenciatura de Matemática e, após corrigidos os problemas apresentados na prévia, ocorreram duas aplicações com alunos do Ensino Fundamental II. Como resultado, os alunos obtiveram boas aproximações para o número π, alcançando valores de 3,1 e 2,78 como aproximação para π na primeira e segunda aplicação da oficina, respectivamente.

Palavras-chave: Geometria Probabilística, Probabilidade, GeoGebra.

INTRODUÇÃO

A Agulha de Buffon é um experimento geométrico-estatístico proposto pelo matemático francês Georges-Louis Leclerc, conhecido como Conde de Buffon, no século XVIII. Esse experimento consiste em jogar uma agulha de comprimento conhecido sobre uma superfície com linhas paralelas igualmente espaçadas com medida de 2 agulhas, com o objetivo de estimar o valor de π, a constante matemática que representa a relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro (SILVA, 2014).

Assim, esse experimento foi o foco de uma oficina realizada no Projeto de Residência Pedagógica para alunos do Ensino Fundamental II, que foi realizada nas dependências de uma universidade federal do estado do Paraná.

O intuito da oficina foi apresentar conteúdos matemáticos de forma desconstruída e aplicada à realidade, na perspectiva da modelagem matemática. Assim, foi construída uma

[1] Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, luanacarolinejunges@hotmail.com.

[2] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, leandrobrito@alunos.utfpr.edu.br.

[3] Professor Orientador: Doutor, Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, renatomerli@utfpr.edu.br.

dinâmica relacionando conteúdos matemáticos como retas paralelas, ângulos, probabilidade e média com o experimento e a conclusão matemática do porquê a Agulha de Buffon, de fato, fornece uma aproximação de π.

A modelagem matemática no contexto educacional é fundamental para que os alunos possam formular hipóteses, verificar sua veracidade e aplicá-las a realidade. Ela promove a criação de modelos matemáticos para representar as situações dadas e permite que os estudantes sejam atuantes em seu processo de ensino e aprendizagem (BEAN, 2001). Esta, aliada ao uso de tecnologias, como o GeoGebra[4], torna a aprendizagem um processo dinâmico, em que os alunos realizam experimentações e buscam por conjecturas, construindo um modo de pensar a matemática, efetivamente, significativo (PERIUS, 2012).

Nas próximas seções, serão apresentadas a definição do experimento Agulha de Buffon, como foi realizada a Transposição Didática desse experimento, a metodologia utilizada para embasar a escrita do plano de aula, o referencial teórico necessário para compreender o experimento e o relato de experiência da aplicação desse plano de aula durante oficinas temáticas para turmas multisseriadas.

METODOLOGIA

Para aplicar o experimento Agulha de Buffon, foi necessário realizar uma transposição didática da teoria. Chevallard (2013, p.9) define Transposição Didática como: “a transição do conhecimento considerado como uma ferramenta a ser posto em prática, para o conhecimento como algo a ser ensinado e aprendido, é precisamente o que eu tenho chamado de transposição didática do conhecimento”.

Dessa perspectiva, buscou-se significar o número π através do experimento, para que os alunos pudessem vivenciar essa prática e buscar conceitos matemáticos que pudessem exprimir o porquê desse experimento aproximar esse número irracional. Segundo Bean (2001), essa é a essência da modelagem matemática, em que características e relações advindas das hipóteses formuladas pelos alunos são traduzidas para termos matemáticos que representam a situação problema apresentada.

Através desse resultado, foram realizadas aproximações do número irracional π. Para finalizar a oficina, justificar o fato desse experimento aproximar o número π é essencial. Assim, os ministrantes, através de perguntas direcionadas, guiaram os alunos através da modelagem.

[4] Geogebra é um *software* de matemática dinâmica, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculo numa única aplicação.

REFERENCIAL TEÓRICO

A Agulha de Buffon é um experimento relacionado ao estudo da representação geométrica dos problemas de probabilidade. Para o enunciado do problema, utilizaremos a versão "[…]sobre um plano formado apenas por placas paralelas e iguais, joga-se uma haste de comprimento determinado e que suponhamos de largura desprezível. Quando este objeto cairá sobre uma única placa?" (PAES et al, 2015, p. 1).

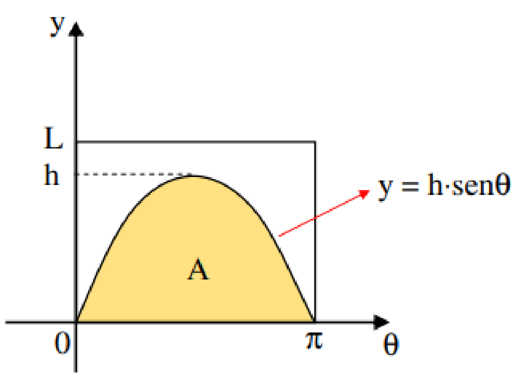
O criador desse problema de probabilidade foi o cientista Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, que viveu no século XVIII e foi um naturalista francês que ainda antes de Darwin apresentou ideias sobre a evolução das espécies, em seu livro, de 1733, "*Histoire Naturelle*", que incluía uma seção sobre probabilidade. E nesta seção que se encontrava o problema da Agulha de Buffon (SILVA, 2014).

A solução do problema envolveu uma série de cálculos de probabilidade complexos, que Buffon realizou com a ajuda de seu amigo matemático Pierre Louis de Maupertuis. Com isso, a agulha de Buffon se tornou um problema clássico da teoria das probabilidades e tem sido estudada e ampliada por muitos matemáticos ao longo dos anos desde sua proposta original, tendo inclusive uma aplicação na realidade, em tomografias computadorizadas (SILVA, 2014).

No entanto, cabe aqui destacar a Transposição Didática feita para a utilização do experimento – ou seja, uma adaptação do saber a ser ensinado, advindo do saber científico, para o saber escolar (CHEVALLARD, 1985).

Como pode-se observar (Figura 1), o cálculo da probabilidade dos eventos da Agulha de Buffon envolve uma área.

Figura 1 – Probabilidade do Experimento



Fonte: Silva (2014, p. 56)

Sendo assim, seria necessário o uso de integrais para calcular a área A de fato para, assim, chegar na probabilidade do evento "agulha intersecta reta". No entanto, notou-se um outro pensamento lógico que também leva à explicação do número π ser a resposta para o problema.

Para realizar a transposição didática desse método, um plano de aula foi construído e se deu nas seguintes etapas:

1. Revisão de conceitos básicos para compreensão do experimento: posição relativa entre as retas no plano, ângulos e probabilidade;
2. Introdução a Probabilidade Geométrica através de situações simples;
3. Realização do experimento Agulha de Buffon, utilizando 22 palitos de picolé e uma cartolina com retas paralelas equidistantes e com distância da medida de dois palitos;
4. Construção de uma tabela com a quantidade de palitos jogados, quantos destes intersectaram alguma das retas e a razão entre esses valores;

Rodada	Números de palitos jogados	Números de palitos que intersectaram retas	Razão entre os valores
1			
2			
3			
4			
5			
Total			

5. Exposição dos resultados obtidos pelos alunos;
6. Apresentação de uma situação ideal do experimento com o Geogebra; *https://www.geogebra.org/m/wHuaKvkG*
7. Matematização dos resultados encontrados através dos seguintes questionamentos:

Coloque um palito em qualquer lugar da folha. Dica: para responder as questões abaixo, sempre considere a reta mais perto do palito.

- Fixando um ponto e rotacionando o palito, ele intersectaria a reta mais próxima?
- Meça a distância entre as retas utilizando palitos. Para isso, posicione palitos que cubram a distância entre as retas. Quantos palitos foram necessários?
- Considerando a reta mais próxima, faz sentido rotacionar mais de 180º, em direção à reta mais distante? Há a chance de o palito intersectar a reta mais distante?
- Pensando agora na probabilidade do evento "Palito que intersecta alguma reta". Quais seriam os casos possíveis? Dica: quantos ângulos possíveis existem? De quantas formas um palito pode cair?

- Considerando que o palito faz apenas um ângulo – ou seja, cada palito assume uma única posição, temos $casos\ favoráveis = 1$. Sendo assim, qual é a probabilidade de um palito intersectar a reta?
- Faz sentido dividir $\frac{1}{180°}$ e obter um número próximo a 3,14? Justifique.

8. Formalização dos resultados apresentados:

A conclusão que se pretender chegar é a de que a razão foi uma média de acertos – "a cada x palitos jogados, y palitos cruzam as retas."

O experimento que justifica esse fato é a Agulha de Buffon, o problema proposto por ele, de forma simples foi: se supormos que, ao deixar uma agulha pequena cair em um papel traçado por linhas paralelas, qual deve ser a probabilidade de que a agulha cruze uma dessas linhas?

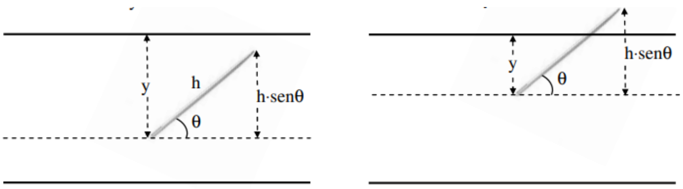
Na demonstração dessa hipótese, proposta por Lins (2004), há uma aproximação de π como uma das aplicações. Utilizando esse método, o italiano Lazzerini, em 1901, após 3408 lançamentos da agulha obteve 1808 cruzamentos com as retas, estimando o valor de π em 3,1415929, com seis casas decimais corretas. Contudo, essa aproximação foi realizada utilizando o conceito de probabilidade.

Se observarmos a fórmula do cálculo de probabilidade, $P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis}$, ao contar quantos palitos foram arremessados e dividir pelo número de palitos que intersectaram as retas traçadas, isso é o inverso da definição de probabilidade.

Agora, por que isso dá certo para aproximar π?

Seja y a distância da ponta do palito até uma das retas e θ o ângulo formado com um eixo paralelo às retas:

Figura 2 – Distância e Ângulo



Fonte: Silva (2014, p. 55)

Seja h o tamanho do palito e L a distância entre as retas, com $L \geq h$. Sendo assim, um palito pode cair a uma distância de 0 a L de qualquer reta da folha. Mas percebe-se que o fator que realmente influencia na intersecção com as retas paralelas é o ângulo θ, independentemente da distância y do palito às retas. Percebe-se também que θ está limitado entre 0 e 180°, pois qualquer ângulo maior que 180º possui um ângulo correspondente no intervalo de θ. Sendo assim, a probabilidade de um palito intersectar uma reta é de:

$$\frac{1}{180°} = \frac{casos\ favoráveis\ dos\ palitos\ intersectarem\ às\ retas}{casos\ possíveis\ dos\ palitos\ intersectarem\ às\ retas}$$

Mas, durante o experimento, fizemos o inverso:

$$\frac{180°}{1} = \frac{casos\ possíveis\ dos\ palitos\ intersectarem\ às\ retas}{casos\ favoráveis\ dos\ palitos\ intersectarem\ às\ retas}$$

Isso porque objetivava-se que π aparecesse como resultado. No entanto, a probabilidade real seria então de $\frac{1}{\pi}$.

Mas é possível dividir graus por um número e obter um número? A resposta é não, o resultado seria em graus. Logo, 180° deve corresponder a um número. Pela relação acima:

$$\frac{180°}{1} = \pi \rightarrow 180° = \pi$$

Mas e se a circunferência é maior, por exemplo, com raio 2 palitos, ainda se manteria a relação $180° = \pi$? Não, a semicircunferência aumentaria proporcionalmente ao raio r:

$Semicircunferência = \pi \cdot r$

Logo, teríamos a probabilidade final como:

$$\frac{1}{\pi \cdot \frac{L}{2}} = \frac{casos\ favoráveis\ dos\ palitos\ intersectarem\ às\ retas}{casos\ possíveis\ dos\ palitos\ intersectarem\ às\ retas}$$

Sendo L a distância entre as retas, isso é igual ao diâmetro da circunferência. Para obter seu raio, basta dividir por 2. Como a distância entre as retas era de 2 palitos na atividade, ficamos com: $\frac{1}{\pi \cdot \frac{2}{2}} = \frac{1}{\pi \cdot 1} = \frac{1}{\pi}$. Exatamente o resultado encontrado.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

De início, é importante destacar que foi feita uma prévia da oficina com alunos do curso de Licenciatura em Matemática que participam do Projeto Residência Pedagógica. Nessa prévia, houve cerca de 40 minutos para apresentar a oficina e aplicar parte dela.

Durante a execução, surgiram diversos problemas como: perguntas abertas demais para os alunos; o modo como os alunos jogavam os palitos estava inadequado – seria necessário mais instruções para melhorar; a construção das retas paralelas em cima das cartolinas não estava levando em consideração uma reta paralela que ficava exatamente na borda da cartolina; claras dificuldades em associar a geometria do problema com a probabilidade.

Isso auxiliou a aprimorar as questões e melhorar o direcionamento da aplicação, já que surgiram bons questionamentos – se nem mesmo discentes do curso conseguiram resolver o problema em seu formato atual, será que os alunos conseguiriam? O resultado final, já contendo as mudanças, foi apresentado na seção de metodologia e levou em consideração a adição de questões que criassem um caminho mais direto para o aluno chegar à resposta.

As oficinas realizadas, de fato, para o Projeto de Residência Pedagógica, ocorreram nas dependências da universidade, no dia 13 de maio de 2023 e foram divididas em dois momentos, ou seja, a oficina foi apresentada a dois grupos distintos.

Primeira Aplicação

A primeira aplicação teve seu tempo reduzido, pois os alunos que vinham da cidade vizinha acabaram chegando atrasados. Ainda, o dia da aplicação contava com baixas temperaturas, o que gerou muitos desistentes inesperados. A oficina foi aplicada, inicialmente, para um grupo de três alunos, com idade entre 10 e 13 anos.

A parte inicial, que foi a revisão de conceitos básicos, como a posição relativas entre retas, ângulo e probabilidade foi tranquila, os alunos compreenderam com facilidade. Como a oficina estava sendo aplicada por dois ministrantes e uma monitora, cada um teve a oportunidade de auxiliar um dos alunos durante a realização do experimento. Eles apresentaram um pouco de dificuldade na interpretação da tabela e como os dados deveriam ser organizados, mas como todos possuiam um residente à disposição, o experimento foi um sucesso.

No momento em que os três alunos concluíram o experimento, chegou uma aluna atrasada. A postura tomada pelos residentes foi a de inclusão dessa aluna na aula, um dos ministrantes sentou-se ao lado dela e explicou individualmente tudo aquilo que havia sido discutido em grupo. Ainda, ela realizou o experimento para poder acompanhar o restante da ofina com êxito.

Após a experimentação, os alunos deveriam realizar a média aritmética simples dos resultados obtidos, esse cálculo não era claro aos alunos do sexto ano, os demais realizaram de forma correta. Posteriormente, esses dados foram expostos no quadro para que fosse realizada a média dos quatro resultados médios encontrados.

Nenhum dos alunos conseguiu associar o valor encontrado ao número π. Acreditamos que isso se deve ao fato de que dois dos alunos eram do sexto ano e, até o momento, não tinham visto o conteúdo de números irracionais. Os demais, um de sétimo ano e outro do oitavo ano, provavelmente não conseguiram correlacionar, visto que experimentos utilizados para aproximar o número π geralmente utilizam circunferências.

Diante disso, os ministrantes apresentaram o experimento Agulha de Buffon como uma forma de aproximar o número π utilizando a Probabilidade Geométrica. Nesse momento, o contexto histórico foi apresentado pela monitora, assim como algumas curiosidades sobre esse número irracional.

Para, de fato, relacionar o experimento ao número π, foi utilizado o conceito de probabilidade, mas invertido. No caso da Agulha de Buffon, encontra-se a razão entre o número de palitos que intersectaram retas pelo número total de palitos jogados. Esse conceito foi bem aceito pelos alunos, que perceberam que quanto mais vezes realizavam o experimento, a média se aproximava mais de 3,1415, sendo uma aproximção muito boa para π.

Por fim, foi apresentada uma situação ideal por meio do *software* Geogebra, em que 200 palitos eram jogados sempre da mesma distância e com a mesma força, para que os alunos pudessem verificar que a margem de erro a que eles estavam submetidos por essas questões era pequeno e, que mesmo sendo uma situação ideal, a média das 25 últimas jogadas realizadas, apresentava distorções, por algumas vezes chegava a 3,141 e outras a 2,8, por exemplo.

Segunda Aplicação

A segunda aplicação contou com 21 participantes, estes foram divididos em grupos de quatro ou cinco alunos. Essa turma era bastante heterogênea, pois contava com estudantes de todo o Ensino Fundamental II, do sexto ao nono ano, o que foi um desafio.

Os alunos foram submetidos ao mesmo processo descrito anteriormente, tendo o início muito semelhante à primeira turma. O experimento acabou sendo um pouco mais agitado, várias dúvidas surgiram durante sua realização, mas todas foram sendo sanadas até sua conclusão. As principais dúvidas foram quanto à interpretação das perguntas, como anotar os dados na tabela e como fazer, de fato, o experimento.

Da mesma forma que a primeira aplicação, contexto histórico foi apresentado pela monitora, assim como algumas curiosidades sobre esse número irracional, seguido de uma discussãoe formalização dos resultados obtidos.

Considerando que a segunda aplicação contou com um número maior de testes, se comparada à primeira, os resultados, teoricamente, deveriam ser mais precisos. Da mesma forma, alguns alunos acabaram encontrando valores muito discrepantes do esperado. Contudo, a aproximação final realizada com as médias encontradas foi de 2,78, menos precisa do que a realizada com a primeira turma de aplicação.

Isso provavelmente se deu pois é um experimento probabilístico e, apesar do experimento tender ao número π a medida que se repete, nem sempre isso acontece nas primeiras vezes, pela Lei dos Grandes Números (MLODINOW, 2011). Como verificou-se com os estudantes no *software GeoGebra*, mesmo fazendo o lançamento de 200 palitos simultâneos, as vezes, se obtem médias menores do que 2,78. Logo, é plenamente possível que os alunos tenham desenvolvido o experimento corretamente e, mesmo assim, obtido um valor distante de π.

Mas ainda não se pode descartar também que os alunos tenham tido problemas com a contagem do número de palítos que intersectam as retas, ou com o lançamento dos palitos, que pode ter se concentrado em uma única região. O evento teórico da Agulha de Buffon considera que as agulhas tem chance equiprópvavel de caírem em qualquer lugar da superfície (SILVA, 2014), o que não é algo que acontece, de fato, no mundo físico, pois um humano não consegue replicar a equiprobabilidade dos palitos no lançamento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação da Agulha de Buffon na estimativa do valor de π é uma demonstração fascinante de como a matemática pode ser aplicada a problemas práticos e experimentais. Esse experimento geométrico e estatístico nos permite obter uma estimativa razoável de π através de uma simples manipulação de palitos e linhas paralelas.

Ao repetir o experimento várias vezes e analisar os resultados, é possível utilizar a probabilidade de um palito cruzar uma linha para calcular uma aproximação de π. Essa aplicação não apenas nos oferece uma maneira interessante de abordar o valor de π, mas também ilustra a importância da probabilidade na matemática e como ela pode ser usada para fazer estimativas em situações práticas.

A Agulha de Buffon tem uma importância significativa na Educação Matemática, especialmente no ensino de geometria, probabilidade e estatística. Sua aplicação prática e experimental traz uma articulação com Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Resolução de Problemas envolvente para conceitos matemáticos abstratos, tornando-os mais tangíveis e acessíveis aos alunos (BEAN, 2001).

Ao realizar o experimento da Agulha de Buffon, os estudantes puderam vivenciar diretamente os princípios da probabilidade e da geometria. Eles puderam explorar como o comprimento do palito, a distância entre as linhas paralelas e o ângulo de queda do palito influenciaram a probabilidade de cruzar uma linha. Isso permitiu que eles observassem a relação entre essas variáveis e aplicassem seus conhecimentos matemáticos para fazer previsões e análises.

Por meio dessa abordagem prática e experimental, a Agulha de Buffon ajudou a despertar o interesse dos alunos pela matemática. Ela mostrou como a matemática pode ser aplicada em situações do mundo real, tornando a aprendizagem mais relevante e envolvente. Além disso, o experimento promoveu a colaboração e a comunicação entre os alunos, pois eles puderam discutir suas estratégias, comparar resultados e trocar ideias.

Para próximas aplicações, acredita-se que é possível manter essa estrutura de aplicação, alterando as perguntas após o experimento, buscando mais clareza em seus enunciados. Além disso, deve-se alterar a formalização do número π e o motivo para que ele seja um número irracional.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática?. **Educação matemática em revista**, v. 8, n. 9/10, p. 49-57, 2001.

CHEVALLARD, Ives. Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias. **Revista de Educação, Ciências e Mathematics**, v. 3, n. 2, p. 1-14, 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar.** Geometria plana, v. 9, 252p., 1993.

LINS, Lauro Didier. **Agulha de Buffon.** Recife: Centro de Informática da Universidade. Federal de Pernambuco. 2004. Disponível em: buffon.dvi (ufpe.br). Acesso em: 25 de ago. de 2023.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2009.

PAES, A. Z.; FIORINI, N.; CABRERA, S. C.; NASCIMENTO, S. **O problema das Agulhas de Buffon**. Instituto de Física-Universidade São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: 20150702010351!MEFE_O_problema_das_Agulhas_de_Buffon.pdf (usp.br). Acesso em: 23 de ago. de 2023.

PERIUS, Ana Amélia Butzen. **A tecnologia aliada ao ensino de matemática**. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Mídias na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Cerro Largo, 2012. Disponível em: 000911644.pdf (ufrgs.br). Acesso em: 27 de ago. de 2023.

SILVA, Antônio Klinger Guedêlha da. **Probabilidade geométrica: generalizações do problema da agulha de Buffon e aplicações.** Dissertação (Mestrado Profissional em

Matemática) - Universidade Federal do Ceará, 2014. 74f. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/8109. Acesso em: 28 de mar. de 2023