GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA EXPERIÊNCIA VIVENCIADA NO PIBID

Wlisses Matheus Santiago de Carvalho [1]
Marcos Grilo [2]

RESUMO

A necessidade de se trabalhar com as Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica justifica-se por ser um tópico que permite ilustrar, em nível elementar, como ocorre a validação de verdades matemáticas. Neste trabalho, relatamos as experiências vivenciadas durante a aplicação de um projeto de intervenção no âmbito do Programa de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), intitulado "Geometrias Não Euclidianas na Educação Básica". Objetivamos discutir compreensões na Educação Básica sobre a dependência da verdade matemática quanto à axiomática adotada. O projeto está ancorado na perspectiva da Educação Matemática Crítica. Dividimos o nosso projeto em 6 etapas, onde foi possível perceber o avanço gradativo dos estudantes em relação à aprendizagem dos tópicos abordados. Avaliamos que os estudantes demonstraram interesse em aprender um conteúdo que não integra o currículo obrigatório de Matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Geometrias Não-Euclidianas, Educação Matemática Crítica, axiomática, verdade matemática.

INTRODUÇÃO

A geometria é de grande importância para as pessoas, pelos seus conceitos estarem entranhados na sociedade, a todo momento estamos utilizando da geometria no nosso cotidiano, independente do contexto social (PIASESKI, 2016, p. 6). Esse fato passou a ser formalizado e estudado apenas com Euclides (300 a.C.), com o livro “Os Elementos”, que serviu de base para o ensino de geometria, e monopolizou o que se conhecia sobre geometria até meados do século XIX, onde surgiram as hoje conhecidas Geometrias Não-Euclidianas, com as frustradas tentativas de demonstrar o quinto postulado euclidiano (PIASESKI, 2010, p. 11).

Nesse contexto, segundo Sachs (2016), vários matemáticos importantes tentaram demonstrar o quinto postulado da Geometria Euclidiana, cuja versão moderna pode ser enunciada da seguinte forma: "Dada uma reta r e um ponto P fora dela, existe uma única reta paralela a r passando por P". Essas tentativas de demonstração do quinto postulado, todas frustradas, culminaram na formalização das geometrias não-euclidianas. Ainda segundo Sachs (2016, p. 21), vários matemáticos da época tentaram dar significado a frustrante demonstração

[1] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS - BA, bolsista do PIBID, wlisses1012@gmail.com;
[2] Professor orientador: Dr. Marcos Grilo, Departamento de Ciências Exatas – UEFS – BA, grilo@uefs.br.

do quinto postulado euclidiano, mas o russo Lobachevsk (1792-1856) foi o primeiro matemático, talvez, a chegar a uma certeza da existência de outras geometrias, publicando o primeiro livro sobre Geometrias Não-Euclidianas da história, em 1829, onde nomeou essa geometria de "imaginária". Por outro lado, por meio de cartas trocadas com outros pensadores, Gauss (1777-1855) foi o primeiro matemático a escrever sobre esse tema, não publicado por receio de gerar repercussão negativa na comunidade acadêmica da época (SACHS, 2016, p. 25).

Nesse sentido, Barreto e Tavares (2007) nos fala sobre as dificuldades em incluir o ensino das Geometrias Não-Euclidianas no sistema básico de ensino brasileiro. Por outro lado, faz se necessário, que pelo menos nos cursos de Licenciatura em Matemática, sejam, ao menos, apresentados esses conteúdos aos professores em formação, como problematizam os autores: "É indiscutível a necessidade de se ensinar Geometrias Não Euclidianas, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática. Seria possível um professor de Matemática não saber que existem outras Geometrias além da elaborada por Euclides?" (BARRETO; TAVARES, 2007, p. 78).

Outrossim, as geometrias, de forma geral, ainda são vistas, principalmente pelos estudantes, de maneira isolada na Matemática e longe de seu cotidiano. Muito disso se dá pelas limitações encontradas da Geometria Euclidiana e em seus conceitos básicos (BRUM; SCHUHMACHER; SILVA, 2015 p. 421). Por exemplo, a medição da distância entre duas cidades não se dá por meio de um segmento de reta. Dessa forma, Brum, Schuhmacher e Silva (2015), nos mostram que trabalhar com as Geometrias Hiperbólica e Esférica na Educação Básica, propicia aos estudantes a criação de um significado, obtendo um olhar geométrico de mundo, conforme um dos objetivos propostos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). (BRASIL, 2017, p. 271-272)

Nesse contexto, segundo Barreto e Tavares (2007), em meados do século XIX, houve a formalização e o desenvolvimento de alguns conhecimentos matemáticos, conhecidos atualmente como Geometrias Não-Euclidianas, onde trabalhamos com quatro dessas neste projeto, chamadas de Hiperbólica, Esférica ou Elíptica, do Táxi ou do Uber e a Projetiva. Entretanto, o surgimento de novos conhecimentos geométricos não significou mudanças esporádicas de imediato, mas sim, resistência da grande maioria da comunidade matemática da época. Dessa forma, a resistência a mudança é sentida até os dias atuais no ensino de matemática, especificamente no ensino de geometria, visto que há uma certa "priorização" da maioria dos professores no ensino de Geometria Euclidiana, em detrimento do ensino das

Geometrias Não-Euclidianas, principalmente na educação superior, onde deveria ter um aparato maior para os professores em formação (BARRETO; TAVARES, 2007, p. 74).

Este relato objetiva discutir compreensões na Educação Básica sobre a dependência da verdade matemática quanto à axiomática adotada por meio da aplicação de um projeto de intervenção sobre geometrias não-euclidianas na educação básica. O projeto foi executado no âmbito do subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Uefs, em um dos Colégios parceiros. Como objetivos específicos, estabelecemos: distinguir os diferentes tipos de geometrias não euclidianas; relacionar conceitos das geometrias não euclidianas com o cotidiano; desenvolver o pensamento crítico dos estudantes por meio das geometrias não euclidianas. O projeto foi aplicado em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio com carga horária total de seis horas.

METODOLOGIA

Para a aplicação, dividimos a metodologia do nosso projeto de intervenção em 7 (sete) etapas: Motivação, Introdução, Geometria Hiperbólica, Geometria Esférica ou Elíptica, Geometria do Táxi ou do Uber, Geometria Projetiva e Questionário Avaliativo. Ao todo, em uma turma do 3° ano do ensino regular do turno matutino de um Colégio da rede Estadual de Ensino da Bahia, parceira do Pibid, aplicamos em seis horas aulas todas as etapas.

A aplicação do projeto ancorou-se na perspectiva da Educação Matemática Crítica de Ole Skovsmose (2008), o que propiciou aos estudantes a desconstrução de uma visão da matemática assentada em uma tradição baseada em definição, exemplos e exercícios. Nessa linha, a introdução de conceitos básicos das Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica, sob a perspectiva da Educação Matemática Crítica, pode estimular nos estudantes um olhar crítico para a realidade na qual está mergulhado.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Etapa 1- Motivação.

Começamos a aplicação do nosso projeto de intervenção com alguns questionamentos, do tipo: O que vocês entendem sobre geometria? A geometria faz parte da matemática? Existe apenas uma geometria na matemática? Outros questionamentos surgiram no momento da aula. Após esse momento, introduzimos uma pequena história intitulada “O problema do urso” (BARCO, 2016). Com esse problema, tentamos intuitivamente fazer com que os próprios alunos entendessem as limitações da Geometria Euclidiana e as necessidades que levaram ao surgimento de novas geometrias. Após apresentarmos esse probleminha inicial, fizemos alguns questionamentos para envolver e estimular os alunos: Utilizando uma folha de papel, desenhe o percurso que o Urso fez. Agora, utilize a bola de isopor e os elásticos para fazer esse percurso. Qual a cor do Urso? O que levou você a essa conclusão?

Etapa 2- Introdução.

Estimulamos os estudantes a pensarem na motivação para a qual houve a necessidade do surgimento de novas geometrias, a partir do quinto postulado de Euclides, indagando-os sobre as limitações da Geometria Euclidiana. Tomamos como exemplo o problema do urso, que abordamos anteriormente.

Etapa 3- Geometria Hiperbólica.

Dando continuidade, dividimos a sala em grupos circulares como “ilhas” e introduzimos o assunto com uma breve contextualização histórica sobre a Geometria Hiperbólica e as motivações do seu surgimento. Assim, chegamos até a definição de “ponto de sela” nessa geometria. Usando ferramentas do dia a dia dos estudantes, explicamos o que é um ponto de sela, tentando contextualizá-lo.

Após esse momento, distribuímos folhas de ofício para todos os estudantes e sugerimos que eles desenhassem triângulos. Após, questionamos se a partir do que eles entenderam sobre ponto de sela, se seria possível desenhar um triângulo em um sólido hiperbólico da mesma forma como eles desenharam na folha de ofício. A partir disso, estimulamos os estudantes a pensarem nas propriedades do triângulo na Geometria Hiperbólica e no nosso espaço, contextualizando na cidade de Feira de Santana-BA, através da história do “Universo de Zeta”, teoria abordada pelo Prof. Ledo Vaccaro Machado : O nosso espaço é realmente euclidiano? A soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Hiperbólica é igual a 180°? A soma é maior ou menor do que 180°? O que surgir.

Logo após, sugerimos uma breve reflexão, primeiramente em grupo, dos resultados obtidos e posteriormente todos em conjunto em um momento de discussão, levantamento de dúvidas, perguntas e conclusões.

Etapa 4- Geometria Esférica ou Elíptica.

Nessa etapa, assim como na anterior, começamos a motivação a partir do seu surgimento, com uma breve contextualização histórica e usando da interdisciplinaridade com o uso de algumas noções básicas de geografia no globo terrestre. Além disso, utilizamos o cotidiano do aluno para que ele pudesse criar significado sobre o objeto matemático em questão. Assim, com um pequeno exemplo contextualizado, demos início a essa etapa: Se esticarmos uma corda de 500 quilômetros sobre o mar, ela ficaria em nível? Formaria uma reta?

Em seguida, solicitamos aos estudantes que eles desenhassem e cortassem triângulos e círculos nas folhas de ofício. Após, sugerimos que sobrepusessem as construções nas esferas de isopor. Levantamos alguns questionamentos sobre o fenômeno ocorrido, de forma que os próprios alunos tivessem um olhar crítico sobre o que propomos: Vocês notaram algo diferente durante esse fenômeno? Vocês perceberam alguma diferença nas medidas de área e perímetro do triângulo e do círculo?

Após esses questionamentos, propomos que os alunos calculassem a área e o perímetro do triângulo e do círculo, tanto no plano (folha), quanto sobrepondo na esfera. Assim, os estudantes perceberam as diferenças. Dando continuidade, apresentamos algumas curiosidades sobre essa geometria, como: dois triângulos podem ter dois ângulos retos. Ao final, estimulamos os estudantes a pensarem como a Geometria Esférica é vista no dia a dia deles, e qual a sua importância para a sociedade.

Etapa 5- Geometria do Táxi ou do Uber.

A priori, apresentamos conceitos básicos dessa geometria e discutimos brevemente o que levou a sua criação. Após esse momento, conduzimos os alunos a inferir as propriedades de uma métrica através de uma situação problema. Ela foi elaborada da seguinte forma: escolhemos um voluntário e pedimos para que ele ou ela dissesse um trajeto que fizesse cotidianamente, por exemplo: O deslocamento da sua casa até o Colégio em que estuda. Após, refletirmos juntos, levantamos hipóteses sobre o caso em questão: Em linha reta, qual seria a distância da casa desse aluno ao colégio? Essa menor distância em linha reta importa para o aluno? Se ele não vai de sua casa para o colégio em linha reta? Quantos quilômetros a mais o aluno anda todos os dias para ir ao colégio? Questionamentos e hipóteses que surgirem dos alunos.

Ao final, sugerimos uma breve reflexão sobre a real importância da Geometria Euclidiana para o dia a dia da sociedade, e o que eles concluíram sobre a Geometria do Táxi e a sua importância para a sociedade. Por fim, apresentamos a métrica do taxista fazendo uma contextualização da sua utilização na realidade.

Etapa 6- Geometria Projetiva.

Nessa etapa, assim como nas outras, demos início com uma breve história do surgimento da Geometria Projetiva. Nesse sentido, introduzimos algumas noções básicas sobre as artes, mostrando o movimento Renascentista do século XVI e destacando algumas obras, que segundo Delai e Franco (s. d. p.) foram a inspiração para o surgimento dessa geometria. Com isso, temos o intuito dos próprios estudantes construírem o conhecimento sobre ponto de fuga, profundidade e continuidade, conceitos muito importantes para tal geometria.

A priori, distribuímos folhas de ofício para os estudantes e pedimos que eles desenhassem qualquer coisa que eles desejassem. A partir daí, fizemos com que eles mesmo percebessem onde a Geometria Projetiva está inserida, dentre os desenhos. Além disso, analisamos em conjunto cada um dos desenhos feitos, na tentativa de enxergarmos os conceitos dessa geometria, anteriormente apresentados.

Dando continuidade, explicamos as ideias básicas da "caixa escura", a partir da visão geométrica, além de relembrarmos conceitos básicos de física, mostrando assim, as diversas possibilidades de interdisciplinaridade das geometrias. A posteriori, levantamos uma breve reflexão sobre o que seria dos meios de comunicação, da construção civil, dos cinemas (que usam dessa tecnologia), da inteligência artificial e dentre outras coisas que surgiram dos estudantes, se não existisse a Geometria Projetiva.

Etapa 7- Questionário avaliativo.

Nessa etapa, aplicamos um pequeno questionário, onde pedimos para que os estudantes avaliem a forma em que nós bolsistas de iniciação a docência aplicamos o projeto. Além disso, sugerimos para que os estudantes destacassem o que mais lhe chamou atenção durante as etapas, além de deixarem sugestões para que possamos melhorar o nosso projeto e como professores.

Durante a aplicação do projeto, no primeiro momento, podemos perceber a surpresa da maioria dos estudantes por descobrirem naquele momento a existência de outras geometrias, além da euclidiana. De certa forma, também ficamos surpresos pelo fato de se tratar de uma turma do terceiro ano do ensino médio regular. Logo, esse fato se mostra preocupante, pois representa a realidade da maioria dos estudantes brasileiros. Como nos mostra Piaseski (2010), um dos principais motivos para esse acontecimento é que a maioria dos professores preferem não ensinar sobre as Geometrias de forma geral, por motivos adversos, deixando-as em segundo plano.

Esta realidade encontrada na escola, vivida pelo primeiro autor enquanto estudante da Educação Básica e também abordado por Leivas (2013), revela que as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica não são seguidas quanto ao ensino das Geometrias Não-

Euclidianas. Dessa forma, a cada geometria apresentada, percebemos que a maioria dos estudantes estranharam esse "novo" conteúdo. A fundamentação do nosso projeto na Educação Matemática Crítica nos possibilitou, a todo momento, interligar o conteúdo de cada uma das geometrias à realidade dos estudantes, o que nitidamente despertava interesse em participar da aula de forma interativa.

Notamos que na utilização de recursos em que os alunos já estavam acostumados no seu dia a dia, como o uso da lousa, da leitura de textos e a utilização de teoremas e definições matemáticos, eles se dispersavam, dirigindo-se para as redes sociais ou desviando a atenção com conversas paralelas. Contudo, quando apresentamos materiais manipuláveis e sugerimos a participação de voluntários, a aula despertou a atenção de toda a turma. Adicionalmente, Rocco (2008) reforça a importância em utilizarmos materiais manipuláveis nas aulas de geometria, facilitando a construção de novos conhecimentos para o estudante. Nesse contexto, percebemos que os discentes se envolveram assiduamente e despenderam muito mais tempo nos momentos em que sugerimos que eles construíssem e analisassem o que eles mesmos produziram.

Outrossim, todas as reflexões que propomos aos estudantes, ao final de cada etapa, foi uma tentativa de pôr em prática os fundamentos da Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2008). Dessa forma, podemos dizer que tivemos resultados animadores, visto que alguns estudantes não faziam ideia das diversas possibilidades didáticas da matemática. Assim, consideramos que a maioria dos estudantes conseguiram desconstruir a visão engessada da matemática apenas como números e contas. Conforme Piaseski (2010) afirma, introduzir o ensino de geometria na educação básica é indispensável, pois este estudo ajuda no desenvolvimento lógico, além de proporcionar uma melhor compreensão do objeto matemático, pela sua importância no cotidiano do estudante.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dessa forma, pelos registros, dados do próprio projeto e pelas observações dos autores, conseguimos entender que o ensino de matemática não pode se limitar às quatro paredes da sala de aula, ao quadro ou muito menos ao livro didático. Como nos fala Skovsmose (2008), a matemática não pode ficar no "pedestal", sendo considerada inquestionável ou "superior" às outras ciências. Temos que levá-la ao cotidiano do aluno, não apenas de forma "contextualizada" e sim de maneira que ele próprio possa construir um olhar crítico sobre o que está ao seu redor. Assim, temos plena condições de pôr em prática a educação dialógica de Paulo Freire (1921-1997), onde o aluno se sentirá parte do processo de ensino e aprendizagem.

Entretanto, como desenvolvido neste trabalho, percebemos que o ensino das geometrias pode acontecer de maneira concreta, criativa, participativa e ainda servir como base para que os estudantes construam um olhar crítico sobre a sua realidade. Para tanto, a mudança do olhar sobre o ensino de matemática deve vir, não apenas dos estudantes da graduação, mas desde os professores da Educação Básica e dos que atuam nos cursos de formação de professores no Ensino Superior.

Nesse sentido, faz-se necessário um esforço conjunto para a incorporação do ensino de geometrias não-euclidianas na Educação Básica. Dessa forma, as diretrizes curriculares nacionais, estaduais e municipais devem ser atualizadas. A busca por métodos de ensino de geometria euclidiana que estimulem a criatividade, de forma didática, pode ser um ponto de partida para que não se limite o olhar geométrico dos nossos estudantes a uma “antolha”.

Neste trabalho, foi possível perceber o interesse dos estudantes pelas Geometrias Não-Euclidianas. Vários fatores podem ter contribuído para esse interesse, desde a facilidade de contextualização do conteúdo ao seu caráter extremamente interdisciplinar. Outrossim, entendemos que o ensino de geometrias não-euclidianas na Educação Básica necessita de mais estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de Iniciação a Docência.

REFERÊNCIAS

BARCO, Luiz. Geometria com Urso e sem Urso: Colocando a Matemática em xeque. **Superinteressante,** fev, 1989. Disponível em: https://super.abril.com.br/ciencia/geometria-com-urso-e-sem-urso-colocando-a-matematica-em-xeque. Acesso em: 20 ago. 2023.

BARRETO, M. S.; TAVARES, S. Do mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias Não Euclidianas. **Vértices,** Rio de Janeiro, v.9, n. 1 / 3, jan/dez, 2007. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/matematica_artigos/artigo_barreto_tavares.pdf. Acesso em 18 ago. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum. Brasília**, [2018?]. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2023.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; SILVA, S. C. R. As Geometrias Esférica e Hiperbólica em foco: Sobre a apresentação de alguns de seus conceitos elementares a estudantes do ensino médio. **Bolema,** São Paulo, v. 29, n. 51, p. 419-427, abr. 2015. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51r03. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/T36yBSpjPxZxcWTTX8kNN4m/?lang=pt. Acesso em: 19 ago. 2023.

DELAI, Sidinei; FRANCO, Valdeni Soliani. Geometrias Não Euclidianas. **Dia a dia educação**, Paraná, Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/236-4.pdf. Acesso em: 19 ago. 2023.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometrias Não Euclidianas: Ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n.3, p. 647-670, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16187/pdf. Acesso em: 18 ago. 2023.

PIASESKI, Claudete Maria. A Geometria no Ensino Fundamental. Rio Grande do Sul, 2010. Disponível em: https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1271.pdf. Acesso em: 25 ago. 2023.

ROCCO, C. M. K.; FLORES, C. R. O ensino de Geometria: Problematizando o uso de materiais manipuláveis. Santa Catarina. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/123-1-A-gt5_rocco_ta..pdf. Acesso em: 21 ago. 2023.

SACHS, Línlya. O quinto postulado de Euclides como história de problemas. **Hipátia**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 11-29, dez. 2016. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/437/67. Acesso em: 18 ago. 2023.

SKOVSMOSE, Ole. A Educação Matemática Crítica: A questão da democracia. **Papirus**, São Paulo, 2001. Disponível em: http://www1.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba_e_skovsmose_2001.pdf. Acesso em: 20 ago. 2023.