Conflitos Cognitivos Observados em Estudantes de Licenciatura em Matemática em um Curso de Álgebra Moderna

Hernando José Rocha Franco[1]

Resumo

Este trabalho refere-se ao projeto de dissertação de mestrado em que se investiga as dificuldades de aprendizagem de alunos de Licenciatura em Matemática diante de um primeiro curso de Álgebra Moderna. Busca-se compreender, através da fala e escrita desses alunos, a interação entre a definição formal, a imagem e definição conceituais de um objeto matemático. Durante um semestre acompanhou-se os estudantes durante as aulas da disciplina Álgebra I, cuja ementa contempla os conceitos de anéis, ideais, corpos e polinômios. Os dados do trabalho de campo estão sendo analisados à luz do referencial teórico adotado. Posteriormente, identificados os possíveis conflitos cognitivos, pretende-se construir um diálogo com os futuros alunos de Álgebra Moderna através de notas escritas visando superar as dificuldades previamente identificadas.

Palavras – Chave: Álgebra Moderna, Imagem conceitual, Conflitos cognitivos, Pensamento matemático avançado.

1. Introdução

Durante os encontros do nosso grupo de estudo e pesquisa, criado no início de 2010, no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, buscou-se um referencial teórico que nos auxiliasse na compreensão dos processos cognitivos relacionados ao desenvolvimento do chamado Pensamento Matemático Avançado. Concentrou-se, então, nos trabalhos de psicologia cognitiva dos pesquisadores David Tall e Shlomo Vinner, em particular na teoria da imagem conceitual e definição conceitual.

A partir de março de 2011, passamos a acompanhar as aulas da disciplina Álgebra I do curso de Licenciatura em Matemática da UFJF na intenção de identificar os possíveis conflitos cognitivos vivenciados pelos estudantes diante de conceitos algébricos abstratos, tais como anéis, ideais, corpos e polinômios. Estas aulas foram ministradas pelo nosso orientador na pesquisa, o prof. Carlos Alberto Santana Soares.

Inicialmente, o trabalho durante as aulas foi na observação e registro das dúvidas dos alunos, além de suas respostas ou silêncios diante das perguntas do professor. No decorrer do curso, a inspeção das resoluções de questões de provas, a aplicação de questionários à turma e a realização de entrevistas com alguns alunos nos trouxeram

[1] Mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF. Email: hernando.franco@ig.com.br

informações importantes do campo de pesquisa. Esses dados, analisados à luz do referencial, constituíram-se no projeto de dissertação de mestrado que se encontra em desenvolvimento.

No que se referem às nossas concepções sobre as relações do professor de Matemática e a Matemática, acreditamos na contínua aproximação entre ambos, ou seja, no enriquecimento deste profissional, o professor, com o seu objeto de trabalho, o conhecimento matemático.

1.1 Justificativas

Vivemos numa sociedade que passa por grandes transformações, impulsionada pelos rápidos avanços tecnológicos e alterações sócio-econômicas. As mudanças, se por um lado trazem novas perspectivas, por outro, alimentam inquietude e podem gerar insegurança.

Educar, sob esse cenário, traz enormes desafios, haja vista a necessidade de se formar cidadãos críticos, criativos, reflexivos, que saibam trabalhar em equipe, capazes de aprender a aprender, inseridos em ambientes informatizados cada vez mais complexos.

Nesse sentido, concordamos com Duval (2009) no que tange a importância de se compreender as dificuldades por vezes insuperáveis que muitos estudantes têm na compreensão da Matemática. Qual a natureza dessas dificuldades e onde elas se encontram? As respostas a essas questões não devem estar restritas à Matemática ou à sua história, mas é necessária:

> [...] uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. (DUVAL, 2009, p. 11).

Na pesquisa de Mondini (2009) sobre como os modos de conceber a Álgebra em cursos de formação de professores de Matemática percebe-se a ênfase que os docentes dão à formação matemática e pedagógica do futuro professor de Matemática.

> Os depoentes consideram importante uma formação sólida no que diz respeito à base matemática e pedagógica do curso, para que o egresso não apenas exerça sua profissão, mas que faça a diferença pelo conhecimento que lhe confere possibilidade de se movimentar de um modo mais livre e comprometido quando docente. (MONDINI, 2009, p. 172).

Embora essa relevância da formação pedagógica do professor de Matemática seja destacada nesta pesquisa, os seus depoentes também salientam que a "falta de conexão entre a educação básica e o ensino superior é uma barreira que interfere na aprendizagem da Álgebra como disciplina na Licenciatura."

Souza (2008), ao falar sobre o ensino de Álgebra no curso de Licenciatura em Matemática, aponta como fundamental o ensino de estruturas algébricas em um curso de licenciatura em matemática, visto como um alicerce básico para o licenciando. segundo a autora, faz-se necessário, porém, destacar os pontos relevantes da disciplina e não apenas cumprir currículo e apresentar a teoria de forma vazia e abstrata.

Se por um lado tem-se a importância do estudo das estruturas algébricas para a formação matemática do futuro professor, por outro podem estar estudantes da licenciatura, diante de uma grande gama de conceitos abstratos, com dificuldades na compreensão destes conteúdos.

Assim, consideramos pertinente o estudo dos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra nos cursos de Licenciatura. Em particular, a investigação de possíveis conflitos que podem emergir na interação dos licenciandos em Matemática com os conceitos apresentados num curso de Álgebra Moderna.

1.2 Objetivos

Nesta pesquisa buscamos compreender os diversos conflitos de aprendizagem apresentados por alunos de Licenciatura em Matemática diante de um primeiro curso de Álgebra Abstrata, visando apontar alternativas didáticas através de notas escritas a partir de alguns conflitos previamente identificados.

Inicialmente, algumas questões norteadoras podem nos auxiliar na elaboração de nossa questão de investigação:

- *É possível identificar nas falas dos alunos possíveis conflitos cognitivos na compreensão dos conceitos de Álgebra? Por "falas", entendemos não somente a comunicação oral, mas toda e qualquer forma de comunicação que puder ser identificada.*

- *Como compreender a interação entre a definição formal de um objeto matemático com a imagem conceitual e a definição conceitual percebidas deste mesmo objeto?*

De modo a sintetizar a interrogação que norteia esse trabalho, pode-se explicitá-la da seguinte maneira:

- ***O que evidenciam os conflitos de aprendizagem manifestados por alunos de Licenciatura em Matemática num primeiro curso de Álgebra Abstrata, à luz das interações entre definição formal, imagem e definições conceituais?***

Esperamos que esses questionamentos venham a ser respondidos como conseqüência das compreensões que possamos construir pelas análises dos dados da pesquisa, na busca também de se produzir um diálogo com os futuros alunos de Álgebra I através de notas escritas sobre temas tratados nesta disciplina visando superar alguns conflitos previamente identificados.

2 O referencial teórico

Segundo Dreyfus (1991), o Pensamento Matemático Avançado consiste numa grande série de processos, como por exemplo, os processos de representar, visualizar, generalizar ou ainda outros, tais como classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar. Dentre estes processos citados, consideram-se os mais destacados para o desenvolvimento do pensamento matemático a representação e a abstração. Em Álgebra, por exemplo, conceitos como anéis e grupos tendem a ser complexos para os estudantes, haja vista a necessidade de abstração exigida para a compreensão dessas estruturas matemáticas.

A forma como se trata essa complexidade é uma característica distintiva entre o pensamento avançado e o pensamento elementar e, para Tall (1991), a transição entre esses dois pensamentos envolve a passagem do descrever para o definir, do convencer para o provar de uma maneira lógica baseada essencialmente em definições e deduções formais.

2.1 Relações entre imagem conceitual, definição conceitual e definição formal

Em um artigo publicado em 1981, Tall e Vinner apresentaram à comunidade de Educação Matemática a teoria da imagem conceitual e definição conceitual.

Segundo os autores, a mente humana não é uma entidade puramente lógica. A forma complexa em que funciona está frequentemente em desacordo com a lógica matemática, na qual os conceitos são definidos de modo exato, preciso, para fornecer uma base sólida para a teoria matemática.

Nesse sentido, pode-se inferir que muitas das dificuldades encontradas pelos estudantes, nos diversos níveis de ensino de matemática, repousam na distinção entre os conceitos matemáticos formalmente definidos e apresentados nas aulas e os processos cognitivos pelos quais são compreendidos.

Segundo Tall e Vinner, o termo *imagem conceitual* descreve:

> ...a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, incluindo todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL & VINNER, 1981).

Ao se desenvolver, a imagem conceitual não precisa ser coerente o tempo todo, pois diferentes estímulos sensoriais podem ativar no cérebro distintas partes da imagem. Essa parte que é ativada em um determinado momento é chamada de imagem conceitual evocada.

O termo *definição conceitual* é tratado pela teoria como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua imagem conceitual. Pode ser aprendida de uma forma "rotinizada", por exemplo, ao decorar uma definição ou demonstração matemática, ou de maneira mais significativa. Pode ser também uma reconstrução pessoal da definição, através de palavras, em que o indivíduo utiliza para explicar a sua imagem conceitual evocada, podendo diferir de uma *definição formal*, isto é, da definição aceita pela comunidade acadêmica matemática em geral.

Em diferentes momentos, imagens conflitantes podem ser evocadas, isto é, porções de uma mesma imagem conceitual podem ser contraditórias. A teoria trata a possível oposição entre essas partes como fator de conflito potencial. Quando aspectos conflitantes são evocados simultaneamente, tem-se o chamado fator de conflito cognitivo.

Vinner (1991) aponta para a necessidade de interação entre imagem conceitual e definição formal. Contextos técnicos, como o estudo de Matemática, impõem aos estudantes hábitos de pensamento totalmente diferentes dos hábitos da vida cotidiana. Nesse sentido, as definições podem ajudar na formação da imagem conceitual e na prevenção de erros advindos de imagens equivocadas. Por exemplo, na afirmativa "dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o de maior área", deve-se consultar as definições geométricas para melhor compreendê-la. Todavia, na vida diária, não precisamos de uma definição formal do que vem a ser, por exemplo, o conceito de *mesa* ou *cadeira*. Para estes objetos, palpáveis e comuns, formamos simultaneamente a imagem e a definição conceituais.

Na perspectiva de Vinner (1991), admite-se a existência de duas "células" (sentido figurado) em nossa estrutura cognitiva; uma para a definição conceitual e outra para a imagem conceitual. Qualquer uma delas ou ambas podem estar vazias. Em situações, por exemplo, onde uma definição matemática é apenas memorizada sem que tenha produzido significado para o indivíduo, pode-se considerar a célula da imagem conceitual vazia.

O modelo prevê que deve haver uma interação entre as duas células, embora elas possam ser criadas de forma independente. Representa-se essa ação recíproca no seguinte diagrama:

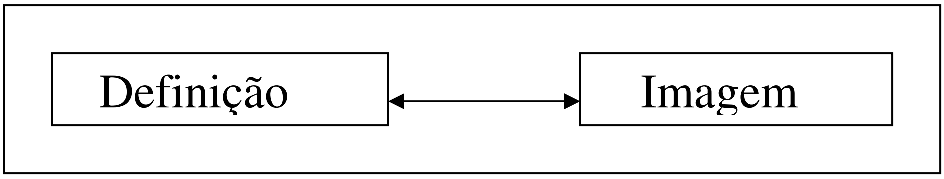

Figura 3.1. Inter-relacionamento entre Imagem e Definição.

Para Brandemberg (2009), esse processo de inter-relacionamento mostrado no diagrama anterior é o que se deseja na prática de ensino e de aprendizagem da matemática; porém, percebe-se que a maioria dos professores do ensino médio e superior privilegia o papel da definição, na expectativa de que a imagem conceitual seja constituída a partir da definição conceitual (formal). (BRANDEMBERG, 2009, p.105). Isso é visto no esquema a seguir:

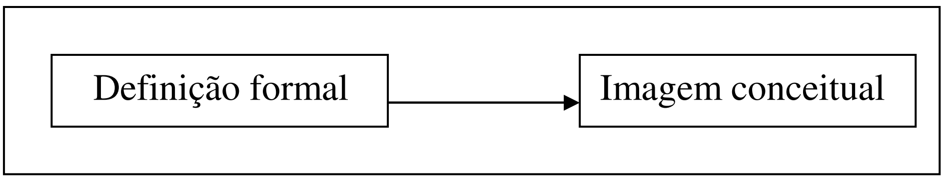

Figura 3.2. Constituição da Imagem conceitual via Definição formal.

Nas salas de aula de matemática, o aluno é levado a realizar tarefas como a resolução de problemas objetivando a aprendizagem dos conteúdos. Neste momento, diante de uma tarefa cognitiva, o aluno deve ter as células definição e imagem conceituais ativadas na busca de resposta à mesma. Esta atividade pode desencadear várias ações entre as células.

Vinner (1993) considera que os processos envolvidos, principalmente nos casos em que se privilegia a definição, passam por um dos seguintes casos:

i) dedução puramente formal: a imagem conceitual pode ser considerada vazia e não tem interferência na resposta, não havendo necessidade de se considerar as impressões e experiências do estudante.

ii) dedução que segue o pensamento intuitivo: são consideradas as experiências e impressões que formam a imagem conceitual seguida de consulta à definição formal.

iii) ação recíproca entre as células: consulta-se a célula da definição formal com posterior inter-relacionamento entre imagem e definição.

Pode-se verificar que em nenhum dos casos anteriores é tomada uma decisão sem antes ser consultada a definição, ou seja, em um contexto técnico, consultar uma definição é algo desejável. Entretanto, Vinner (1991) argumenta que estes processos não refletem a prática, pois é difícil treinar um sistema cognitivo para agir contra sua própria natureza, seja na formação da imagem conceitual ou na realização de determinada tarefa cognitiva. Por exemplo, em Álgebra, as definições de estruturas abstratas como anel, ideal, anel quociente podem fazer sentido para o estudante em dado momento, apoiadas em exemplos específicos, mas a partir do instante em que o mesmo forma sua imagem conceitual, estas definições podem ser esquecidas ou ficarem inativas.

O modelo mais apropriado para o processo que realmente ocorre na prática baseia-se em uma resposta intuitiva, sem consulta à célula da definição, mesmo não estando vazia. Esta tradição se impõe pela força dos hábitos de pensamento diários, em que o estudante percebe êxito na realização das tarefas apenas com consulta à imagem conceitual. Vejamos isso no diagrama a seguir:

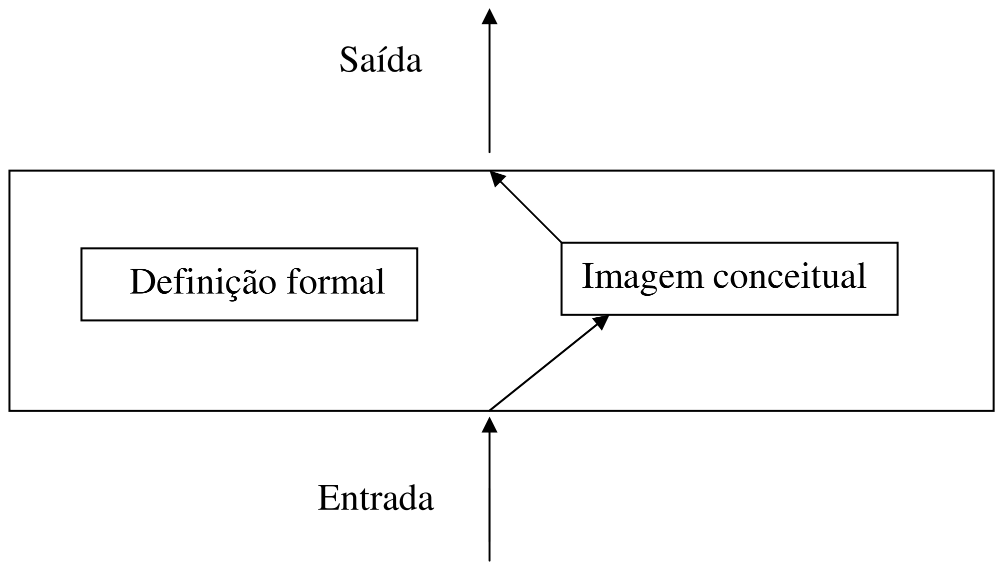

Figura 3.6. Resposta intuitiva.

A maneira de contrariar esta tendência que, a priori, não seria a mais adequada em ambientes muito técnicos, é a proposição para os estudantes de problemas não rotineiros em que a imagem conceitual seja insuficiente para resolvê-los.

Se olharmos para os conteúdos de Álgebra estudados na licenciatura em Matemática e os exercícios propostos nos livros didáticos desta disciplina, pode-se perceber que estão longe de serem problemas rotineiros.

3 Apresentando dados da pesquisa

3.1 O contexto

Ratificando as informações dadas na introdução, o campo de nossa investigação ocorreu durante o 1º semestre de 2011 no acompanhamento das aulas de Álgebra I, disciplina obrigatória no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. A carga horária era de 60 horas-aula semanal e a ementa continha os seguintes tópicos: Anéis e Corpos; Anéis de Polinômios; Extensões Algébricas dos Racionais e Grupos. A bibliografia constava de oito obras e o livro adotado foi "Introdução à Álgebra" de Adilson Gonçalves. As aulas regulares se realizavam em dois dias da semana, a saber: terça-feira e quinta-feira no horário das 16h às 18h. A nossa presença se fez em todas as aulas.

Com o propósito de conhecer melhor o perfil dos doze alunos participantes e suas impressões, aplicaram-se, em momentos distintos, dois questionários. As informações selecionadas foram as seguintes:

1- Os estudantes cursavam o 7° período da Licenciatura em Matemática e se deparavam pela primeira vez com o curso de Álgebra Moderna, trazendo como pré-requisito a disciplina Introdução à Teoria dos Números, cursada pela maioria, entre o 2° e 4° períodos, ou seja, no mínimo há um ano.

2- Sobre possível experiência como docente, sete alunos responderam sim, com trabalhos em cursinhos pré-vestibulares, escolas públicas, projetos da UFJF, além de aulas particulares.

3- Na pergunta sobre a relevância do estudo de Álgebra Moderna para a formação do professor de Matemática, a grande maioria, onze alunos, considerou importante; porém, mesmo aqueles que já atuam em sala de aula não justificaram com clareza esta questão. Alguns, embora apontassem partes interessantes dos conteúdos como anéis e polinômios, admitiram "falta de maturidade" para justificar suas respostas.

4- Para dez alunos, a parte de maior dificuldade de compreensão do livro texto (Adilson Gonçalves) estava nos exercícios propostos, enquanto apenas dois citaram a teoria e os exemplos.

5- Sobre a possibilidade de utilização de outras obras indicadas na bibliografia, oito alunos disseram não consultar. Pode-se inferir que, mesmo estando disponíveis nas bibliotecas da universidade, esses livros não diferem muito no que se referem às dificuldades de interação dos alunos com os mesmos.

6- Quando questionados sobre o que um livro de Álgebra deveria conter no sentido de facilitar a aprendizagem dos conteúdos, a maioria assinalou a alternativa de "exercícios comentados", seguida da opção "exercícios propostos em níveis de dificuldades diferentes".

3.2 Os primeiros conflitos sob a perspectiva do referencial

3.2.1 Sobre Anéis

O primeiro conceito apresentado no curso foi o de anel, definido como um conjunto não vazio (A +, **.**) munido de duas operações, chamadas soma (+) e produto (**.**) em que se verificam as seis propriedades seguintes: comutatividade da soma; associatividade da soma; existência de elemento neutro para a soma; existência de inverso aditivo; associatividade do produto; distributividade do produto em relação à soma.

A indicação, por parte do professor, do conjunto dos inteiros Z como exemplo de anel mostrou aos estudantes a verificação dos seis axiomas anteriores, passando a construir a imagem conceitual dessa estrutura algébrica. Salienta-se que o conjunto Z é um conjunto numérico com o qual se tem contato desde o ensino fundamental, isto é, os estudantes, a princípio, possuem uma imagem conceitual rica em termos de operação com Z.

Apresentou-se, então, mais três propriedades. O anel (A, +, .) será dito:

i) comutativo se $\forall$ x, y $\in$ A, x . y = y . x

ii) com unidade, se $\exists$ 1 $\in$ A, $1 \neq 0$, x . 1 = 1 . x = x

iii) sem divisores de zero se x . y = 0 $\Rightarrow$ x = 0 ou y = 0

O anel que preenche as condições acima é denominado domínio de integridade e que, por sua vez, é dito corpo se $\forall$ x $\in$ A, $x \neq 0$, existir x^{-1} tal que $x . x^{-1} = x^{-1} . x = 1$.

Em relação às propriedades (i), (ii) e (iii), tomando novamente Z como exemplo e, para corpos, os conjuntos dos racionais Q e dos reais $\Re$, percebeu-se, novamente, que os alunos têm imagens conceituais desenvolvidas em relação a esses exemplos. Todavia, a solicitação do professor à turma para que dessem outros exemplos de estruturas onde essas propriedades não são válidas, veio acompanhada de certa introspecção e nenhuma resposta foi dita. O fato de não se ouvir resposta, não garante, necessariamente, que os alunos não soubessem. Talvez, não tivessem certeza, haja vista que os contra-exemplos apresentados no livro didático não são estruturas tão rotineiras, como o conjunto o dos anéis de classes de restos $Z_m = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2},..., \overline{m-1} \}$, em que o elemento $\bar{a} \in Z_m$ é a classe dos números que deixa resto a na divisão por m sendo válidas as operações $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ e $\bar{a} . \bar{b} = \overline{a.b}$. Por exemplo, no anel $Z_6 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5} \}$ tem-se $\bar{2} . \bar{3} = \overline{2.3} = \bar{6} = \bar{0}$, isto é, dois elementos do conjunto são diferentes de zero e o produto deles é zero, donde conclui-se que $\bar{2}$ e $\bar{3}$ são divisores de zero em Z_6.

3.2.2 Sobre demonstrações

Ainda com base nos axiomas de anel, foi proposto para os alunos que demonstrassem outras propriedades, tais como:

a) 0.x = x.0 = 0

b) –(x.y) = (-x).y = x.(-y)

c) (-x).(-y) = x.y

E mais: se A tem unidade então

d) (-1).x = -x

e) (-1).(-1) = 1

Durante a aula em que foram corrigidas as demonstrações acima não se registraram dúvidas, mas ao inspecionarmos as avaliações verificou-se que alguns alunos não conseguiram refazê-las. Parece-nos que a definição formal de anel até aquele momento ainda não havia construído uma imagem conceitual capaz de permitir essas demonstrações, mesmo os alunos já tendo contato com suas resoluções. Isso nos leva também a conjecturar a possibilidade de que aqueles que conseguiram desenvolvê-las na prova poderiam estar apenas repetindo um procedimento "memorizado", haja vista as imagens conceituais formadas dessas propriedades que são realizadas de forma automática, sem demonstração, na Álgebra dos ensinos fundamental e médio.

3.2.3 Sobre Isomorfismo

Um indício de que a definição formal pode, ao menos num primeiro momento, não constituir uma imagem conceitual, foi percebida nos conceitos de homomorfismo e isomorfismo. Formalmente, dois anéis A, A' são ditos homomórficos se existe uma função f: $A \to A'$ tal que:

i) f(x+y) = f(x) + f(y)

ii) f(x.y) = f(x).f(y)

Se f: $A \to A'$ é um homomorfismo bijetivo diz-se que f é um isomorfismo de A sobre A'.

Na segunda avaliação, realizada em 10 de maio de 2011, a primeira questão solicitava nos itens (a) e (b) a definição de homomorfismo e o significado de dois anéis serem isomorfos, respectivamente. O item (c) perguntava se os anéis Z e 2Z são isomorfos.

Inspecionando as resoluções, percebemos que alguns alunos mesmo desenvolvendo corretamente os itens (a) e (b), não conseguiram aplicar a definição formal de isomorfismo para explicar o item (c). Pode-se conjecturar que tratasse de um caso em que a definição formal foi apreendida de forma "rotinizada" sem formar alguma imagem conceitual. Assim, na resposta aos dois primeiros itens, bastava seguir a "dedução puramente formal" sem consulta á célula da imagem; porém, para obter êxito na interpretação de (c) fazia-se necessária a interação entre as células da definição e da imagem.

4 Considerações finais e conclusões preliminares

Para este artigo, optou-se por mostrar um pouco do referencial e as primeiras impressões colhidas do campo de pesquisa. Encontra-se, em desenvolvimento, a análise sobre subanéis, ideais e polinômios que deve transcorrer ao longo do 2° semestre de 2011.

Algumas conclusões, ainda que preliminares, apontam para a necessidade de a Educação Matemática olhar para os processos de ensino e de aprendizagem referentes à Álgebra Moderna, enquanto disciplina curricular obrigatória na licenciatura, e para os estudantes, futuros professores de Matemática. A nosso ver, existem lacunas abertas, principalmente em relação à carência de textos didáticos.

Referências

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. 2009, 188f. Tese (Pós-graduação em Educação Matemática) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A matemática no início do superior**. 2003, 387 f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação) – Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

DOMINGUES, H. H., IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

DREYFUS, T. **Advanced Mathematical Thinking**. In TALL, D. Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer, 1991.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro. IMPA, 1999.

MONDINI, F. **Modos de conceber a álgebra em cursos de formação de professores de matemática**. 2009, 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

TALL, D. Concept image and concept definition. 2003. Disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/conceptimage.html. Acesso em: 15 set. 2010.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**. 1981a. Disponível em < http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html>. Acesso em: 15 set. 2010.