

APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA EVAPORAÇÃO DE LÍQUIDO COM DENSIDADE VARIÁVEL

Fabíola Luana Maia Rocha ¹
Otávio Paulino Lavor ²

RESUMO

A perda de água surge como um dos principais problemas a ser enfrentado pela sociedade, que sofre cotidianamente com as dificuldades de acesso à água. Destaca-se que a evaporação é um dos métodos de desaparecimento da água, a qual pode ser analisada quantitativamente. Diante disto, o objetivo deste trabalho é determinar a velocidade em que uma gota cai em repouso e o tempo que ela leva para evaporar. Para chegar aos resultados, o problema foi modelado por uma equação diferencial de primeira ordem e técnicas de fatores integrantes foram usadas para solucionar o problema. Após aplicação de condições iniciais, determina-se o tempo necessário para que uma gota evapore completamente. O estudo mostrou-se eficaz na modelagem e resolução e pode contribuir para pesquisas de evaporação nas mais variadas áreas.

Palavras-chave: Gota d'água, Equações de primeira ordem, Modelagem, Fatores integrantes, Raio variável.

INTRODUÇÃO

O estudo de equações diferenciais acompanhou o desenvolvimento de diversos problemas e é encontrado nas mais diversas áreas, sendo hoje objeto de pesquisa devido a suas aplicações.

O inglês Isaac Newton e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz iniciaram o estudo das equações diferenciais através do estudo do cálculo durante o século XVII. Os irmãos Jakob e Johann Bernoulli contribuíram para o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e para a ampliação de suas aplicações. Daniel Bernoulli, filho de Johann, tem seu nome associado a uma equação em mecânica dos fluidos e foi pioneiro no estudo das funções de Bessel. Leonhard Euler, considerado o maior matemático do século XVIII, propôs sua formulação matemática de problemas em mecânica e seu desenvolvimento de métodos para resolvê-los. Ainda, destacam-se Lagrange, Laplace, entre outros nomes atuantes no desenvolvimento desse ramo importante da matemática (BOYCE E DIPRIMA, 2017).

¹ Professora substituta da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, fabiola.rocha@ufersa.edu.br;

² Professor Adjunto da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br .

Ainda segundo Boyce e DiPrima (2017), as equações diferenciais são relações que envolvem taxas e descrevem muitos dos princípios ou leis que regem fenômenos físicos e problemas reais e para compreendê-los, faz-se necessário um estudo de equações diferenciais e suas soluções (BOYCE E DIPRIMA, 2017, p.1).

Zill (2016) define equação diferencial como uma equação que apresenta derivadas de uma ou mais funções desconhecidas, em relação a uma ou mais variáveis independentes é denominada de equação diferencial.

As equações diferenciais estão presentes no estudo de problemas nas áreas da engenharia, física, biologia, agronomia, estatística, dentre outras. Entre os modelos matemáticos que fazem seu estudo ser de grande relevância, estão os modelos para problemas conhecidos: corpo em queda na atmosfera, lei do esfriamento/aquecimento de Newton, circuito RLC em série, crescimento populacional, etc.

Nessa perspectiva, um dos tocantes que pode ser evidenciado se refere a questões climáticas e ambientais, mais especificamente os conceitos e determinações de evaporação de água, tendo em vista as problemáticas pautadas no cenário ambiental brasileiro e mundial. Segundo Pereira et al. (2009), um fator de grande importância na análise da vazão máxima permissível para a concessão de outorga se refere às perdas de água por evaporação nos reservatórios de regularização.

Segundo Medeiros (2019) o conhecimento das perdas de água por evaporação em superfície livre de água nos reservatórios nas regiões áridas e semiáridas é de fundamental importância no gerenciamento dos recursos hídricos para os diferentes usos, seja na produção agropecuária, agroindustrial, abastecimento doméstico, entre outros.

A estimativa de evaporação em fontes confiáveis é essencial para planejar e gerenciar os recursos hídricos, assim como também estudar os impactos ambientais gerados por esse processo. Os idealizadores dos recursos hídricos, consideram a evaporação como “perda”, pelo grande número de água que passa para atmosfera em forma de vapor, por isso é relevante conhecer os valores que se obtenha essa evaporação tanto no projeto como no decorrer dele (MEDEIROS, 2019).

Evidencia-se ainda que o líquido possui uma propriedade interessante, que é a sua tendência de evaporar ou vaporizar e essa evaporação é o processo natural pelo qual a água, de uma superfície livre (líquida) ou de uma superfície úmida, passa para a atmosfera na forma de vapor, a uma temperatura inferior à de ebulição (CARVALHO; SILVA, 2006).

O que se sabe, segundo Moreira et al. (1999) é que num dado instante, algumas moléculas na superfície do líquido adquirem energia cinética suficiente para vencer as forças de atração intermoleculares, e escapam do líquido. Desta forma, o presente trabalho se propõe a estudar a evaporação do líquido através de equações diferenciais, onde será considerado uma densidade variável, encontrando então o tempo que uma gota de água irá evaporar após cair da nuvem.

METODOLOGIA

O percurso metodológico deste trabalho consiste, inicialmente de uma revisão bibliográfica de equações diferenciais, onde é visto a trajetória histórica de seu desenvolvimento e aplicações. Em seguida, o estudo baseia-se em verificar as aplicações. A escolha do estudo da evaporação do líquido se justifica pelas características do semiárido, consequentemente pelas problemáticas que são evidenciadas no referido ambiente.

A fim de contribuir para as pesquisas da área, considera-se um líquido com densidade variável para com o objetivo de determinar a velocidade em que uma gota cai em repouso. O problema é modelado por uma equação diferencial em que a solução será obtida como uma função temporal.

Dadas as condições iniciais, as constantes serão determinadas e mostra-se o valor do raio da gota. De posse desta informação, pode-se determinar o tempo necessário para que uma gota se evapore completamente. Uma vez seguido este percurso, o modelo servirá de base para esta e outras aplicações em diversas disciplinas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Num líquido, como em qualquer estado da matéria, as moléculas apresentam velocidades variáveis. Nem todas apresentam a mesma energia cinética. Algumas movimentam-se rapidamente, outras lentamente, outras ainda virtualmente paradas. Quanto maior a temperatura do líquido, maior a fração de moléculas com alta energia cinética, e quanto menor a temperatura, menor será esta fração.

Em temperaturas elevadas, a energia cinética média das moléculas é maior, e mais delas podem atingir o nível mínimo a fim de escapar das forças intermoleculares. Por isso, líquidos aquecidos evaporam mais rapidamente. Do mesmo modo, uma grande área superficial permite

que mais moléculas estejam em contato com o meio externo ou que mais moléculas rápidas possam atingir a superfície e escapar. Assim, uma maior área superficial aumenta a velocidade da evaporação.

Também a intensidade das atrações intermoleculares influi na velocidade da evaporação. Se as forças são fracas, a uma dada temperatura mais moléculas podem atingir a energia mínima de escape. Se as forças são mais poderosas, sob a mesma temperatura, então menos moléculas terão essa energia mínima para evaporar. Isso explica porque sólidos não evaporam facilmente, já que suas forças intermoleculares são muito possantes se comparadas a um líquido.

O equilíbrio sólido-líquido e as variações de temperatura podem nos trazer informações importantes sobre a relação da evaporação do líquido com a densidade variável, visto que se considerarmos a influência produzida pelo fornecimento de calor a um sistema no qual um sólido está em equilíbrio com um líquido.

O aumento gradativo da temperatura ocasiona a formação de mais líquido, que utiliza parte do calor fornecido, minimizando o aumento na temperatura. Uma variação posterior de qualquer tipo, vai depender se a pressão e a temperatura permanecerem constantes, no processo de absorção de calor.

Com pressão constante, se a densidade do líquido for menor que a do sólido, o aumento na temperatura produz uma expansão no sistema, pois sendo o líquido menos denso que o sólido o espaço entre as moléculas é maior.

Com volume constante, a pressão final é maior que a inicial, quando a densidade do líquido é menor que a do sólido, porque a energia cinética das moléculas é maior, pois há mais espaço livre.

Assim, se a densidade do líquido for maior que a do sólido, todas as considerações anteriores ocorrem inversamente. É o caso da água, que se expande quando congelada a pressão constante. (MOREIRA et al., 1999)

As Variações de Pressão e o Equilíbrio Sólido-Líquido também nos fornecem algumas informações de suma importância, visto que quando a pressão de um sistema em equilíbrio é aumentada, a fase mais densa é favorecida.

Se a densidade do líquido for menor que a do sólido, forma-se mais sólido. Porque há mais espaço entre as moléculas no líquido (menos denso), o líquido se comprime e forma o sólido.

Se a densidade do líquido for maior que a do sólido, forma-se mais líquido. Nesse caso há mais espaço entre as moléculas do sólido, que se comprimindo formará líquido.

O que causa a diferença de densidade nos diferentes estados é a maneira como as moléculas interagem entre si. (MOREIRA et al., 1999)

À medida que uma gota de chuva cai, ela se evapora, mantendo sua forma esférica. Supondo ainda que a taxa segundo a qual a gota evapora é proporcional à área de sua superfície e que a resistência do ar é desprezível, a velocidade $v(t)$ da gota de chuva é dada por:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3(k/\rho)}{(k/\rho)t+r_0} v = g. \quad (1)$$

Aqui, ρ é a densidade da água, r_0 é o raio da gota em $t = 0$, $k < 0$ é a constante de proporcionalidade e o sentido positivo é considerado para baixo.

Temos;

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3(k/\rho)}{(k/\rho)t + r_0} v = g.$$

Considerando $b = (k/p)$, temos

$$P(x) = 3b/(bt + r_0)$$

Simplificando a equação por b, em (1), temos,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3b v}{bt + r_0} = g$$

Calculando o $P(x)$ pelo fator integrante, obtemos:

$$I = e^{\int P(x)dt}$$

$$I = e^{\int \frac{3b}{bt+r_0} dt}$$

$$I = e^{3 \ln(bt+r_0)}$$

$$I = (bt + r_0)^3$$

Multiplicando o fator integrante dos dois lados da equação

$$\frac{d}{dt} [(r_0 + bt)^3 v] = g(r_0 + bt)^3$$

Multiplicando ambos os lados por dt obtemos a seguinte equação

$$dt \frac{d}{dt} [(r_0 + bt)^3 v] = g(r_0 + bt)^3 dt$$

Após fazer as simplificações, integrando dos dois lados,

$$\int d [(r_0 + bt)^3 v] = \int g(r_0 + bt)^3 dt$$

Após a resolução da integral, ficamos com a seguinte expressão,

$$(r_0 + bt)^3 v = \frac{g}{4b} (r_0 + bt)^4 + c$$

Isolando v na equação, conseguimos a seguinte função,

$$v(t) = \frac{g}{4b} (r_0 + bt) + c(r_0 + bt)^{-3} \quad (2)$$

Agora, considerando $v(0) = 0$, teremos

$$0 = \frac{gr_0}{4b} + cr_0^{-3}$$

Isolando c temos,

$$c = \frac{-gr_0^4}{4b}$$

Substituindo em (2),

$$v(t) = \frac{g(r_0 + bt)}{4b} + \frac{gr_0^4}{4b(r_0 + bt)^3}$$

Como na primeira consideração, assumimos $b = (k/p)$, ficamos com,

$$v(t) = \frac{g(r_0 + \left(\frac{k}{p}\right)t)}{4b} + \frac{gr_0^4}{4b\left(r_0 + \left(\frac{k}{p}\right)t\right)^3}$$

Sendo esta a nossa velocidade quando a gota cai do repouso.

Na meteorologia, o termo virga refere-se à queda de gotas de chuva ou partículas de gelo que evaporam antes de atingirem o solo. Suponha que uma gota de chuva típica seja esférica. A partir de algum tempo, que podemos designar como t_0 , a gota de chuva cai do repouso de uma nuvem e começa a evaporar

Supondo que o raio da gota no instante t é $r(t) = (k/\rho)t + r_0$.

Tomando o raio com relação ao tempo $dr/dt = k/\rho$

Multiplicando ambos os lados por dt e integrando, teremos a seguinte expressão

$$dt \int \frac{dr}{dt} = \int \frac{k}{\rho} dt$$

Assim teremos a resolução abaixo

$$r = \frac{k}{p}t + c_1$$

Logo,

$$r(t) = \frac{kt}{p} + c_1 \quad (3)$$

Considerando $r(0) = r_0$,

$$r(0) = \frac{k0}{p} + c_1$$

Então,

$$c_1 = r_0$$

Logo, substituindo o valor de c_1 em (3),

$$r(t) = \frac{kt}{p} + r_0 \quad (4)$$

que é o raio da gota no instante t , como já havia sido mencionado anteriormente.

Após dez segundos depois que a gota cai de uma nuvem, $r_0 = 0,01$ pés e se $r = 0,007$ pés, tem-se

$$0,007 = \frac{k}{p} 10 + 0,01$$

Assim,

$$\frac{k}{p} = -0,0003 \quad (5)$$

Agora, substituindo esse valor de (5) em (4), temos:

$$r(t) = -0,0003t + 0,01$$

Considerando $r(t) = 0$, então,

$$0 = -0,0003t + 0,01$$

Finalmente, isolando t da nossa equação, teremos,

$$t = \frac{0,01}{0,0003}$$

o que nos fornece um valor de,

$$t = 33,35 \text{ s}$$

Assim, dez segundos depois que a gota cai da nuvem, ela irá se evaporar completamente em 33,35 s.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de equações diferenciais permitiu uma compreensão do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral enriquecendo as técnicas de resolução. A percepção de modelagem enriqueceu o trabalho tendo em vista que diversos problemas das engenharias podem ser modelados e resolvidos com as técnicas estudadas neste trabalho. Especificamente, através da análise de equações diferenciais relacionadas a evaporação de líquidos, pode-se compreender

como se dá a relação entre a evaporação de uma gota de água e a sua densidade bem como o raio da gota.

Nessa perspectiva, destaca-se ainda que a partir dos dados obtidos com as equações diferenciais é possível fazer a aplicação no planejamento e gerenciamento de recursos hídricos, nos mais variados setores que sejam influenciados pela evaporação. Logo, para trabalhos futuros sugere-se a aplicação em um respectivo setor, com intuito de trazer contribuições na resolução dos problemas ambientais.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. Trad. De Valéria de M. Iorio.

CARVALHO, Daniel Fonseca de; SILVA, Leonardo Duarte Batista da. **Evaporação e transpiração**. In: CARVALHO, Daniel Fonseca de; SILVA, Leonardo Duarte Batista da. **CAPÍTULO 6. EVAPORAÇÃO E TRANSPIRAÇÃO**. -: -, 2006. p. 81-94. Disponível em: <<http://www.ufrj.br/institutos/it/deng/leonardo/downloads/APOSTILA/HIDRO-Cap6-ET.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

MEDEIROS, Aline Daniele Lucena de Melo. **Avaliação de métodos de estimativa de evaporação no reservatório armando ribeiro gonçalves em itajá/rn**. 2019. 45 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Agrícola e Ambiental, Centro de Engenharias e Ciências Ambientais, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2019.

MOREIRA, Albert R. et al. **Líquidos: Mudanças de Estado e Propriedades Coligativas**. 1999. Engenharia Elétrica – UNIFACS. Disponível em: <<https://www.eecis.udel.edu/~portnoi/academic/academic-files/liquids.html>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

PEREIRA, S. B.; PRUSKI, F. F.; DA SILVA, D.; RAMOS, M. M. **Evaporação líquida no lago de Sobradinho e impactos no escoamento devido à construção do reservatório**. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. Campina Grande/PB, UAEA/UFCG, v.13, n.3, p.346–352, 2009. Aprovado em 2008

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagens**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.