

DIFUSÃO ANÔMALA INDUZIDA POR ESCALA TEMPORAL EM CAMINHADAS ALEATÓRIAS DE TAMANHO FINITO

J.R. Neyra e T.R.S. Moura

Universidade Federal do Pará, jairneyra30@gmail.com, trsmoura@yahoo.com.br.

Resumo: Propomos um modelo de caminhadas aleatórias, discretas e não-Markovianas para modelar dados de séries temporais de propriedades de regimes de difusão em meios porosos. Usamos o modelo de caminhadas aleatórias como aproximação de séries temporais, constituído por caminhantes aleatórios com perfil de memória da Cauchy. Reportamos nossos resultados numéricos do regime de difusão anômala, acompanhadas de oscilações log-periódicas do primeiro momento da posição. Quando o parâmetro de escala $\beta < 1$, a difusão é superdifusiva acompanhada de oscilações log-periódicas da posição. Desaparecendo para valores típicos de $\beta > 1$, com regime superdifusivo ($H > 1/2$). O superdifusão ocorre para ambas as regiões de anti-persistência ($p < 1/2$) e persistência ($p > 1/2$). Ocorre transição do regime de difusão, na região de persistência, do superdifusivo para o difusivo, quando $\beta \gg 1$.

Palavras-chave: Séries temporais, caminhadas aleatórias, difusão anômala, meio poroso, distribuição de Cauchy.

Introdução

A predição de quantidades observáveis relacionadas ao petróleo, utilizando séries temporais, é um dos desafios atuais da indústria do petróleo [1-5]. As séries temporais são representações de dados ordenado no tempo, tais como o preço do petróleo na bolsa de valores, a produção diária de óleo, as variações no fluxo de fluido, como podem representar grandezas utilizadas na previsão de falhas no mais diversos tipos de peças, dispositivos eletrônicos, etc. Estes dados podem ser usados para a otimização de desempenho da produção de petróleo em plataformas inshore ou offshore com as mesmas características que para uma fábrica [1-2]. As técnicas que utilizam inteligência artificial (IA), na predição de séries temporais, vem ganhando aceitação cada vez maior como integrante de um conjunto de ferramentas para a execução de operações integradas [1].

Uma forma de representar as séries temporais é através dos modelos de caminhadas aleatórias [6]. Inspirados no desenvolvimento de novas ferramentas para a indústria de petróleo. Em particular, para análise de fluxo de fluidos em meios porosos, nós propomos a análise de séries temporais utilizando caminhadas aleatórias discretas (CAD). Cada elemento de fluido sendo aproximado à uma partícula, cada partícula difunde no meio poroso aleatoriamente como resultado da rugosidade do meio poroso, da geometria e do choque com

outras partículas [7]. Um ingrediente adicional, que é incorporado em nossa modelagem, é a capacidade do caminhante aleatório recuperar uma decisão de sua dinâmica microscópica, i.e., recuperar uma decisão tomada no passado. Para realizar a análise estatística realizamos uma série de experimentações, via computador, para um conjunto de caminhantes aleatórios. A finitude das experimentações em termos da análise de espaço (meio poroso finito) e tempo (série temporal finita), nos induzem convenientemente, à reportar nossos resultados para caminhadas aleatórias de tamanho finito.

Os regimes de difusão podem ser classificadas, através do expoente de Hurst (H), em difusão anômala ($H \neq 1/2$) superdifusiva ($H > 1/2$) ou subdifusiva ($H < 1/2$) e ordinária ($H = 1/2$). Medidas típicas de H em outras regiões classificam outros regimes difusivos, exemplos podem ser encontrados em [8-11]. Nosso modelo não utiliza dados de banco de dados, cada passo na dinâmica microscópica do conjunto de caminhantes aleatórios é gerado segundo o perfil memória de Cauchy e possui impacto nas medidas macroscópicas do regime difusivo classificado segundo as medidas do expoente de Hurst.

O nosso modelo foi construído utilizando como base o modelo de caminhadas aleatórias do elefante (CAE) - elephant random walks (ERW) [8]. Este modelo, com perfil de memória uniforme, proposto por G.M. Schütz and S. Trimper, possui o rótulo de “memória de elefante” utilizado, apenas, para enfatizar que está é a melhor memória possível, que trata cada lembrança, i.e. cada decisão tomada no passado, do caminhante aleatório de maneira equiprovável.

Escolhemos o modelo CAE como ponto de partida para a construção do nosso. Algumas características, herdadas pelo nosso modelo, que queremos destacar, possuem influencia direta na dinâmica microscópica. Para as CAE, com dois pontos de correlação, as soluções encontradas para as observáveis físicas macroscópicas são exatas; o CAE é o limite analítico para caminhadas aleatórias que possuem a característica de guardar na memória toda sua história, serve de parâmetro comparativo e a generalização do modelo permite que obtenhamos outros resultados fazendo a mudança da função de distribuição de probabilidade [8]. No CAE, o caminhante aleatório se move para dois pontos adjacentes da sua posição atual em passos unitários, para direita (+1) ou para a esquerda (-1). Outros modelos, generalizações e características podem ser encontrados em [9-11].

Metodologia

Baseados no modelo Schütz e Trimper, nós estamos propondo um modelo de caminhadas aleatórias com perfil de memória segundo a distribuição de Cauchy [12]. O modelo de caminhadas aleatórias com perfil de memória uniforme, discreta, cada incremento realizado no instante de tempo t depende de toda a história do caminhante. Cada estado é recuperado de forma equiprovável, esta característica é responsável por moldar uma caminhada aleatória com perfil de memória uniforme. Portanto, a probabilidade de recuperar uma ação tomada no passado é de $1/t$ sendo t o tempo atual, sendo a caminhada gravada a todo instante, que atribui a característica não-Markoviana à caminhada.

A dinâmica estocástica de cada caminhante ocorre da seguinte maneira: o caminhante anda um passo para a direita (+1) ou um passo para a esquerda (-1), tal como em uma caminhada aleatória unidimensional Markoviana, com a equação de evolução estocástica dada por

$$X_{t+1} = X_t + \sigma_{t+1}(1)$$

para um tempo $t + 1$. A variável σ_{t+1} assume o valor +1 quando o caminhante anda um passo para a direita e -1 quando o caminhante anda para a esquerda. A memória consiste de um conjunto de variáveis aleatórias $\sigma_{t'}$ para o tempo $t' < t$. Este processo ocorre da seguinte maneira:

- (a) no tempo $t+1$ um número t' do conjunto $1, 2, \dots, t$ é escolhido aleatoriamente com probabilidade uniforme $1/t$.
- (b) σ_{t+1} é determinado estocasticamente por, $\sigma_{t+1} = \sigma_{t'}$ com probabilidade p e $\sigma_{t+1} = -\sigma_{t'}$ com probabilidade $1 - p$.

O primeiro passo no instante $t = 1$, ocorre de acordo com a seguinte regra: o caminhante se encontra na posição X_0 e se move para a direita com probabilidade q ou para a esquerda com probabilidade $1 - q$, ou seja, $\sigma_1 = +1$ com probabilidade q e $\sigma_1 = -1$ com probabilidade $1 - q$. Então, segue-se que a equação de evolução estocástica é

$$X_t = X_0 + \sum_{t'=1}^t \sigma_{t'}(2)$$

O parâmetro p é a probabilidade do caminhante repetir uma ação do passado no instante de tempo t' . Quando ($p > 1/2$) o caminhante apresenta um comportamento persistente, este é caracterizado pela repetição de ações passadas. Para ($p < 1/2$) o caminhante toma uma ação contrária a ação que foi selecionada, o caminhante apresenta, portanto, um

comportamento anti-persistente. Para o valor de $(p = 1/2)$ a caminhada aleatória é Markoviana. Nas regiões limítrofes de $(p = 0)$ e $(p = 1)$ surgem dois comportamentos extremos. No ponto $p = 0$, ocorre o máximo do comportamento anti-persistente, enquanto em $p = 1$ ocorre o máximo do comportamento persistente, caracterizado pelo movimento balístico com $(H = 1)$, i.e., o caminhante move-se de forma determinística. Este tipo de caminhada aleatória apresenta característica de que o primeiro passo é macroscopicamente relevante, portanto, possui impacto nos regimes de difusão medidos pelo expoente de Hurst [8].

O primeiro momento da posição é

$$\langle x(t) \rangle = \frac{\delta}{\Gamma(\lambda+1)} t^{2p-1} \quad (3)$$

sendo $\delta = 2q - 1$, $\lambda = 2p - 1$ e Γ a função gama. Os parâmetros δ e λ estão definidos no intervalo $[-1, 1]$.

O segundo momento da posição é dado por

$$\langle x^2(t) \rangle = \begin{cases} \frac{t}{3p-4}, & p < 3/4 \\ t \ln(t), & p = 3/4 \\ \frac{t^{4p-2}}{(3p-4)\Gamma(4p-2)}, & p > 3/4 \end{cases} \quad (4)$$

Note que para $(p < 3/4)$ o segundo momento, eq.(4) depende linearmente de t e a difusão é ordinária, para $(p > 3/4)$ a difusão é caracterizada como superdifusiva. No ponto $(p = 3/4)$ o segundo momento é descrito através de uma função logarítmica do tempo [8]. Nosso modelo é constituído por, baseado no modelo com distribuição equiprovável de eventos de Schütz e Trimper [8], caminhadas aleatórias capazes de lembrar de eventos do passado segundo o perfil de memória descrita pela função de distribuição de probabilidade de Cauchy. A distribuição de probabilidade é usada para trazer da memória uma lembrança do passado do conjunto $1, 2, \dots, t$, neste caso, é a função de distribuição de Cauchy, verificada da seguinte maneira

$$P(t') = \frac{P_0}{1 + \left(\frac{t' - \alpha}{\beta}\right)^2} \quad (5)$$

sendo P_0 a constante de normalização, $\alpha = t/2$ o parâmetro de locação e β o parâmetro de escala. Utilizamos a distribuição de Cauchy truncada no intervalo $[0, +\infty)$. A dinâmica é a mesma do modelo proposto por Schütz e Trimper exibido acima.

Resultados

Nas caminhadas aleatórias o comportamento difusivo é classificado pelo expoente de Hurst. O comportamento difusivo pode ser classificado através da lei de escala assintótica do desvio quadrático médio da posição em relação ao tempo. O desvio quadrático médio é definido da seguinte maneira $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = t^{2H}$, sendo H o expoente de Hurst. Para as nossas caminhadas aleatórias de tamanho finito, o primeiro momento da posição cresce mais lentamente do que o segundo momento, segue-se que a aproximação $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \sim \langle x^2 \rangle$ é pertinente. Portanto, H pode ser avaliado por $\langle x^2 \rangle = t^{2H}$.

Nossos resultados apresentam difusão anômala nas regiões de persistência e anti-persistência. Quando $p > 1/2$ o caminhante tem um comportamento persistente e para $p < 1/2$ anti-persistente. A difusão anômala pode ser classificada como superdifusiva e subdifusiva, de acordo com H. Nosso modelo apresenta o comportamento superdifusivo caracterizado por medidas de $H > 1/2$.

O parâmetro de escala β representa o comprimento da memória do caminhante. Nosso modelo mostra como esse parâmetro influencia na probabilidade do caminhante retomar suas ações passadas. Com o crescimento de β , o regime superdifusivo tende a se caracterizar por difusivo na região de anti-persistência. A Figura 1, mostra essa passagem no decaimento, quando $\beta = 10^3$ e $p = 0$ com $H \approx 1$, passa para $H \approx 1/2$ em $\beta = 10^7$ e $p = 0$.

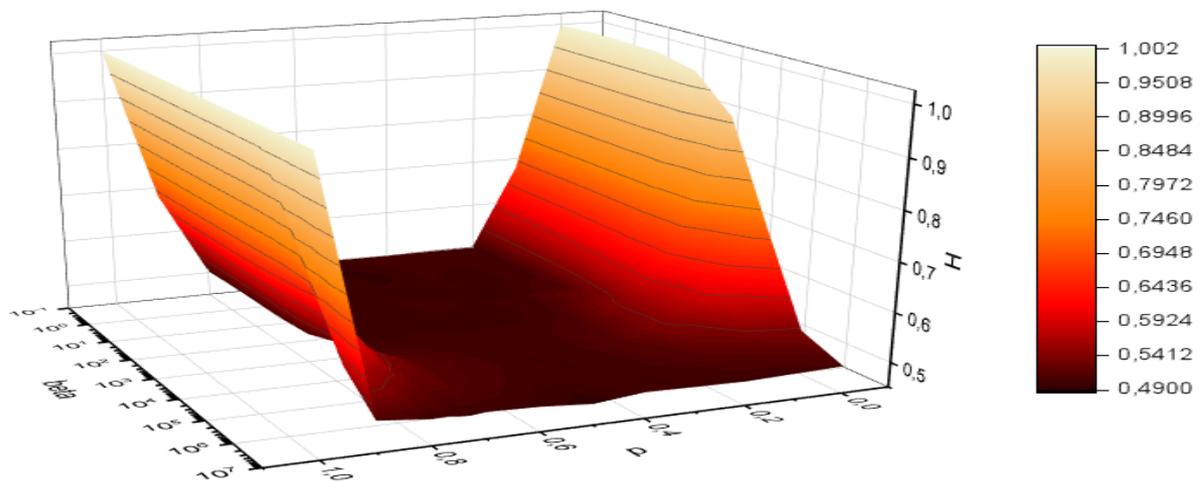


Figura 1: Medidas do expoente de Hurst (H) em função da probabilidade (p) e o parâmetro de escala β , para o modelo de caminhadas aleatórias com a distribuição de Cauchy. Evidenciando o decaimento com o aumento do parâmetro β .

Notamos que quando β está na ordem de 10^7 nosso modelo tem um comportamento do CAE. Na região de anti-persistência, em uma caminhada aleatória com a distribuição de Cauchy, para os valores de β iniciais, onde temos o comportamento superdifusivo, notamos que a difusão do seu primeiro momento possui características log-periódicas. Logo, com a distribuição de Cauchy para pequenos valores de β , no caso $0 \leq \beta \leq 1$, em seu primeiro momento percebemos que ao aumentar o parâmetro β , o comportamento log-periódico diminui como mostra a Figura 2.

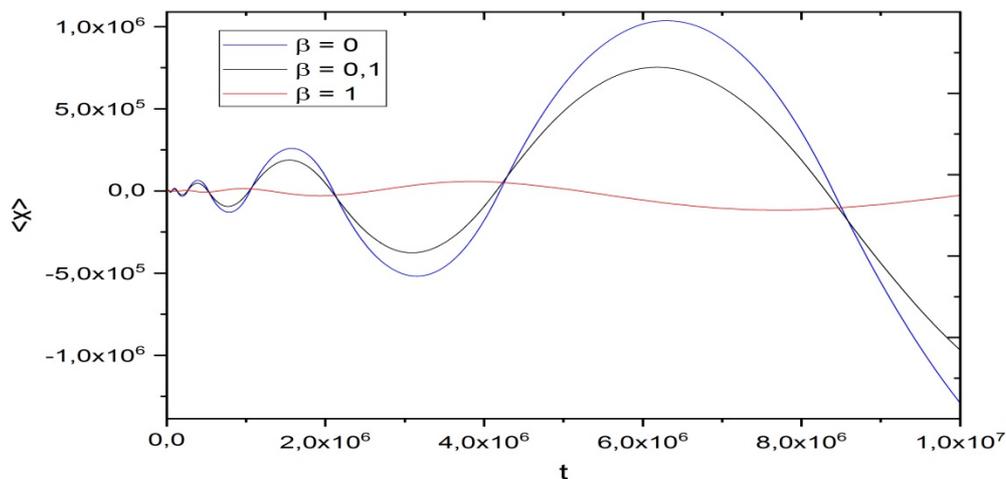


Figura 2: Comportamento do primeiro momento para os valores positivos de $\beta \leq 1$, mostrando a diminuição da oscilação log-periódica em comparação dos valores de β na ordem de 10^{-3} , 10^{-2} e 10^{-1} .

Discussão

Em uma caminhada aleatória com perfil de memória uniforme, cada passo dependerá de toda a história do caminhante. Nosso modelo permite o armazenamento de todos os passos na memória, que podem ser acessados de forma equiprovável, sendo uma característica do modelo de caminhadas aleatórias com perfil de memória uniforme. A distribuição de Cauchy possui média e variância desconhecidas, acrescentamos esta distribuição ao nosso modelo de caminhadas aleatórias. Nossos resultados obtêm o primeiro momento e a variância em uma caminhada aleatória com perfil de memória de Cauchy.

Nos acréscimos de β percebemos o decaimento da superdifusão para difusão no regime de anti-persistência. A tendência de persistência do modelo passa a ser totalmente aleatória nesse regime, de acordo com as medidas quantitativas do expoente de Hurst, que passa de $H = 1$ para $H = 1/2$ no decorrer dos valores de β da ordem de 10^{-3} a 10^7 . Essas

medidas são válidas quando o primeiro momento da posição do caminhante cresce mais lentamente em comparação com o segundo momento.

As oscilações log-periódicas observadas no primeiro momento da posição, em $\beta = 10^{-3}$, desaparecem quando o parâmetro de escala β aumenta para 1. Logo, para as caminhadas aleatórias de perfil de memória com a distribuição de Cauchy, a superdifusão no regime de anti-persistência é acompanhada por oscilações log-periódicas em seu primeiro momento da posição. Essas oscilações se reduzem em comparação do aumento de β nas ordens de 10^{-3} a 10^{-1} . Onde a medida das amplitudes tem um decréscimo quantitativo considerável na mudança dos valores positivos de $\beta \leq 1$.

Conclusões

Em uma caminhada aleatória unidimensional Markoviana, o caminhante pode dar um passo para direita ou para esquerda. Com o perfil de memória, a caminhada é gravada em todos os passos, então o caminhante lembra de toda a sua história. Cada passo do caminhante em um instante de tempo depende do seu percurso até aquele instante, sendo que o caminhante recupera qualquer ação do passado com probabilidade igual. A classificação dos comportamentos de difusão das caminhadas aleatórias são medidas pelo expoente de Hurst. Propomos um modelo de caminhadas aleatórias com perfil de memória conforme a distribuição de Cauchy que possa agregar soluções para os desafios da indústria do petróleo com a predição de series temporais. Com os resultados obtidos em nosso modelo, podemos aplicá-lo em estudos nas áreas de interesse da indústria petrolífera. Por exemplo, o comportamento da difusão anômala estudado em nosso modelo pode se relacionar com a difusão das moléculas do petróleo em meios porosos. Os resultados das características de caminhadas aleatórias não-Markovianas, com perfil de memória em função da distribuição de probabilidade de Cauchy, nos permite compreender o comportamento do petróleo e sua difusão de transporte nos reservatórios.

Agradecimentos

Nós agradecemos a FAPESPA e a UFPA do campus universitário de Salinópolis pelo incentivo a nossa pesquisa.

Referências

- [1] NYBØ, R. Time series opportunities in the petroleum industry. **SINTEF Petroleum Research**. Thormøhlensgate.
- [2] LIEBOWITZ, J. The handbook of applied expert systems. **FL: CRC Press**. Boca Raton, 1998.
- [3] AMARA, M. H. ; MARTIN, B. The Offshore Directional Drilling Advisor: An Expert System for Directional Drilling Optimization. In: SPE ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION, 1990, New Orleans, Louisiana.
- [4] HAVREVOLD, L.; HYTTEN, N. ; PARIGOT, P. Getting More Out of Drilling Data byn Analysis-While-Drilling. In: OFFSHORE EUROPE, 1991, Aberdeen, United Kingdom.
- [5] GOVIA, D. ; CARPENTER, K. Valuation Models for Intelligent Strategies. In: INTELLIGENT ENERGY CONFERENCE AND EXHIBITION, 2008, Amsterdam, The Netherlands.
- [6] DINIZ, R. M. B. ; CRESSONI, J.C.; de SILVA, M. A. A.; MARIZ, A. M. ; de ARAÚJO, J. M. Narrow log-periodic modulations in non-Markovian in random walks. **Phys Rev. E**, 96, 062143.
- [7] INGENHOUSZ, J. Nouvelles expériences et observations sur divers objets de physique. **T. Barrois le jeune**, 1785.
- [8] SHÜTZ, G. M.; TRIMPER, S. Elefants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk. **Phys. Rev. E**, 70, 045101, (2004).
- [9] CRESSONI, J.C.; da SILVA, M. A. A.; VISWANATHAN, G. M. Amnestically Induced Persistence in Random Walks. **Phys. Rev. Lett**, 2007.
- [10] PARAAN, F.N.C.; ESGUERRA, J.P. Exact moments in a continuous time random walk with complete memory of its history. **Physical Review E**, 74, 032101, (2006).
- [11] HURST, H.E.; BLACK, R.P.; SIMAIKA, Y.M. Long-Term Storage: An Experimental Study, Constable, London, 1965.
- [12] FELLER, W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. 2.ed. John Wiley & Sons Inc, NewYork. v. 2.