SOBRE O SURGIMENTO HISTÓRICO DO ZERO, DIVISÃO POR ZERO E NÚMEROS TRANSREAIS

Tiago Soares dos Reis

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro
tiago.reis@ifrj.edu.br

1. Introdução

Na edição anterior do CONEDU (Congresso Nacional de Educação), este autor apresentou um relato de experiência de disciplinas optativas sobre os números transreais nas licenciaturas em matemática e em física (REIS, 2017). Números transreais são um novo sistema numérico proposto nos anos 2000 pelo cientista da computação James Anderson com o objetivo de se permitir a divisão por zero. O leitor pode obter mais informações sobre estes números em (ANDERSON, 2005) (ANDERSON, VÖLKER, e ADAMS, 2007) (REIS, 2015) (REIS e KUBRUSLY, 2015).

Anderson supôs a existência de números além dos já conhecidos, de modo que, de posse destes novos números, a divisão por zero é permitida. Como no âmbito dos números reais ou dos complexos, que são os números vigentes, demonstra-se que não é possível a divisão por zero, a expressão "dividir por zero" soa, no mínimo, de forma estranha. Entretanto, pensamos que o conjunto dos números transreais passam por um processo no qual outras categorias de números já passaram. A história mais uma vez se repete. Um tipo de número é concebido primeiramente de forma intuitiva, imaginativa, supositiva e depois ganha o status de número, tão número quanto os anteriormente já assim aceitos.

Neste texto falamos um pouco sobre o surgimento do zero como número e as principais menções à divisão, ou a não possibilidade de divisão, por zero na história da matemática e é claro sobre os números transreais. Nas disciplinas optativas acima citadas, o presente autor defende a importância de se conhecer a história da matemática para melhor entender o desenvolvimento de uma nova teoria.

2. Divisão por zero e os números transreais

O reconhecimento do número zero, ou algarismo zero, surgiu muito tempo depois dos inteiros positivos. Civilizações antigas, como a babilônica, a egípcia, a grega e a romana, por exemplo, não possuiam uma representação para o zero. Este fato tem influência da filosofia. A princípio, zero representa nenhuma quantidade e, se nada é, é não-ser, não tem necessidade de aparecer, de ser representado. Conjecturamos que o aparecimento tardio de um símbolo para o zero vem de uma questão mais profunda que é o entendimento do não-ser, em outras palavras, do conceito de nada. Segundo a filosofia ocidental, parmenidiana, o ser é e o nada é não-ser e, por isso, não precisa ser representado. No entanto, em outras filosofias o nada é. Na tradição semita, por exemplo, o não-ser também é. O não-ser pode ou não se manifestar. Quando se manifesta, é um ente e, quando não se manifesta, será o nada que se fará notar pela ausência, até que se manifeste dando origem ao ser (REALE e ANTISERI, 2003).

O zero moderno, o que usamos hoje, surgiu provavelmente pouco antes do século VIII no sistema de numeração hindu. Isto é, longe da filosofia grega. E, assim como os demais algarismos que utilizamos hoje, foram difundidos pelos árabes. Os hindus usaram a palavra *sunya*, que significa vazio ou vácuo, para representar seu zero. Pois, usavam esta palavra para representar um marcador de posição nos casos em que no ábaco não havia alguma peça na coluna em questão. Isto foi um grande avanço no sistema de numeração hindu, uma qualidade que outros sistemas não possuiam. Por exemplo, algumas das civilizações citadas no parágrafo anterior, simplesmente, deixavam um espaço vazio para marcar posição. Fazendo uma analogia, é como se hoje representássemos o número onze por “11” e o número cento e um por “1 1”. Claramente, observamos que este tipo de representação pode causar equívocos na leitura. O *sunya* não significava um número em si, uma vez que era usado também para representar uma variável desconhecida. A despeito deste fato, os hindus foram muito felizes em propor um símbolo para demarcar a “posição vazia” (IFRAH, 2005).

Evidências mostram que outro povo também possuia algum tipo de representação para o zero. Por exemplo, o *Codex de Dresden* (um tratado de astronomia e adivinhação maia do século IX), mostra um sistema de base vinte, munido de um zero, no qual o valor de um algarismo é determinado pela posição ocupada na escrita dos números. O interessante é que a partir da terceira casa vigesimal os sacerdotes maias mudavam da base vinte para a base trezentos e sessenta, o que, segundo Ifrah (2005), foi uma irregularidade que atrapalhou o zero maia de ter utilidade prática nas operações aritméticas.

Se a admissão do zero como número se deu de forma tardia, comparada aos outros números inteiros, o problema da divisão por zero, então, se mostra bastante controverso ao longo da história. Uma das dificuldades em definir-se tal divisão é o fato de as interpretações da operação de divisão não serem válidas quando o divisor é nulo. Por exemplo, quando d, m e n são números inteiros positivos, a igualdade $n/d = m$ pode ser interpretada no sentido de serem necessários e suficientes m grupos para se separar n objetos em grupos, onde cada grupo deverá conter d objetos. Nesta interpretação, não faz sentido $d = 0$, pois não existe um número m para que m grupos, cada um contendo zero objeto, disponham os n objetos iniciais. Mesmo se abdicarmos de significados, ainda permanece a incompatibilidade com a definição usual de divisão. De fato, no conjunto dos números reais, divisão é a multiplicação pelo inverso multiplicativo. Ou seja, se a e b são números reais com b não nulo, então a/b significa a multiplicado pelo inverso multiplicativo de b. Ora, se desejássemos permitir o denominador nulo, deveríamos ter um inverso multiplicativo de zero. O que não é possível na definição usual de multiplicação, pois não existe um número real que multiplicado por zero dê 1.

Algumas menções à divisão por zero tem sido feitas ao longo do tempo. Aristóteles disse que não existe razão de zero a um número. O indiano Brahmagupta afirmou que zero dividido por zero resulta zero. Um outro matemático indiano, Mahavira, declarou que qualquer número dividido por zero resulta no próprio número. Baskara, por sua vez, argumentou que uma quantidade dividida por zero torna-se uma quantidade infinita. Esta ideia foi também defendida pelo matemático inglês John Wallis no ano 1656, que já usava o símbolo atual para o infinito. Euler também discute a divisão por zero em seu famoso livro Vollständige Anleitung zur Algebra. Euler argumenta que 1 dividido por 0 expressa uma quantidade infinitamente grande. Primeiro ele conclui que 1 dividido por infinito é igual a nada e, respeitando então a propriedade idempotente do recíproco (o recíproco do recíproco de um número é o próprio número) ele diz que, como o recíproco de infinito é zero, segue-se que o recíproco do zero é igual ao o recíproco do recíproco de infinito donde o recíproco do zero é igual a infinito. Já em 1828, o matemático Alemão Martin Ohm, utilizou o mesmo argumento apresentado no parágrafo anterior para concluir que se a é diferente de, então $a/0$ é sem significado e observa, ainda, que 0/0 tem infinitos significados, sendo, desta forma, proibida a divisão por zero. Com o passar do tempo a ideia de que divisão é o inverso da multiplicação foi se consolidando e, então, os matemáticos foram concordando que o melhor era deixar a divisão por zero indefinida, isto é, sem definição (MARTINEZ, 2012).

James Anderson propôs uma nova definição de divisão. O objetivo desta nova divisão era poder incluir o zero como divisor. Este procedimento, o de mudar-se a definição ou o significado de uma operação, não é novo na matemática. A interpretação das operações aritméticas muda a cada vez que o conjunto numérico é estendido. Por exemplo, a divisão 12/3 = 4 pode ser interpretada por dizer que 4 é a quantidade de elementos em cada um dos 3 conjuntos cuja união disjunta resulta em um conjunto de 12 elementos. Tal significado não pode ser dado à divisão do número pi por raiz quadrada de 2. Entretanto, podemos interpretar esta operação por dizer que seu resultado é o vetor obtido pela homotetia, neste caso contração, cujo fator é o inverso multiplicativo do raiz quadrada de 2, do vetor pi. Esta mesma interpretação cabe à divisão anterior, isto é, podemos dizer que 4 é o vetor obtido pela homotetia de fator 1/3 do vetor 12. Contudo esta explicação não pode ser dada à divisão $2i/i = 2$, onde i é a unidade imaginária dos números complexos. Ainda assim, podemos dizer que 2 é o vetor, no plano bidimensional, obtido pela homotetia, cujo fator é o módulo do inverso multiplicativo do i, e rotação, pelo ângulo que é o argumento do inverso multiplicativo do i, do vetor $2i$. E esta mesma interpretação cabe aos dois casos anteriores. Com estes exemplos, percebemos que a ampliação do significado de uma operação matemática não é uma novidade.

A motivação de Anderson, ao introduzir o conjunto dos números transreais, foi tornar possível a divisão por zero. Seu desejo foi o de aplicar esta teoria à programação de computadores, afim de que estes não voltassem mensagem de erro quando do aparecimento de uma divisão por zero durante seu processamento. O conjunto dos números transreais é formado por todos os números reais e mais três novos elementos: menos infinito, mais infinito e *nullity*. Anderson define que $-k/0$ é igual a menos infinito, $k/0$ é igual a mais infinito, qualquer que seja o número real positivo k, e 0/0 é igual a *nullity* . Anderson, ainda postula regras de equivalência e de operações aritméticas entre as frações, mesmo que alguma possua denominador zero. As regras de equivalência e de operações estabelecidas por Anderson são análogas às regras usuais. Elas foram mostradas na edição anterior do CONEDU (REIS, 2017). Desta forma, no conjunto dos números transreais as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) são fechadas, isto é, o resultado de qualquer uma destas operações entre números transreais é um número transreal. Em particular, divisão por zero é permitida (ANDERSON, 2005).

Note que Anderson estabeleceu os números transreais e sua aritmética de forma axiomática, de forma postulativa. Anderson não define o que são os três novos elementos -1/0, 1/0 e 0/0, ele apenas postula suas existências. Toda teoria proposta de forma axiomática suscita a discussão sobre se são ou não aceitáveis tais axiomas. Acreditamos que pode causar estranheza na proposta de James Anderson, é que, em sua apresentação, ele apresenta um pensamento cíclico. Anderson define os transreais como sendo os reais unidos aos elementos -1/0, 1/0 e 0/0 e define estes elementos como números transreais não reais. Isto é, os objetos -1/0, 1/0 e 0/0 são utilizados para definir a eles próprios. Um outro motivo de estranheza aos números transreais, é que nos novos objetos aparece o símbolo "/", que no contexto, é um símbolo sem definição. Usualmente, este símbolo significa divisão e, nos números reais (que é o conjunto do qual já estão estabelecidas as propriedades), uma fração com denominador zero não possui qualquer significado. É utilizado um símbolo "antigo"' para representar uma operação "nova". Isto é, utiliza-se o símbolo de divisão entre números reais para representar algo ainda não definido, a divisão entre números transreais. Reis, Gomide e Anderson (2016) propõem uma construção do conjunto dos números transreais a partir do conjunto dos números reais. Fazem isso definindo, em uma determinada classe de subconjuntos de pares ordenados de números reais, operações de adição e multiplicação (utilizando a adição e a multiplicação de números reais) e mostram que existe uma "cópia" dos reais na referida classe. Esta classe de pares ordenados executa o papel do conjunto dos números transreais. A partir de então, passam a usar os símbolos das (antigas) operações aritméticas entre números reais para representar as (novas) operações aritméticas entre os transreais. Desta forma, os autores resolvem o problema do pensamento cíclico e do uso de símbolos "antigos" para se representar "novas" operações. Este procedimento é comum na matemática. Dedekind definiu, no conjunto de cortes de racionais, operações de adição e multiplicação e, como existe um isomorfismo de corpos ordenados entre um determinado subconjunto de cortes e o conjunto dos números racionais, Dedekind mostra que existe uma "cópia" dos racionais no conjunto dos cortes. O mesmo ocorre em tantos outros casos, como por exemplo, na construção dos complexos a partir dos reais, na construção dos hiperreais a partir dos reais, dos racionais a partir dos inteiros e dos inteiros a partir dos naturais.

3. Considerações finais

Algumas categorias de números como, por exemplo, os negativos, irracionais, imaginários e infinitesimais, foram concebidos inicialmente como entidades transitórias, que apareciam apenas durante os cálculos, mas que não eram números em si. Não eram objetos com existência própria, mas seus aparecimentos estavam sempre condicionados aos números "verdadeiros". Por exemplo, o símbolo -2 não representava um número, mas apenas a operação de subtração por 2 (ROQUE, 2012). Quando no Cálculo usamos o símbolo do infinito para representar um limite, de certa forma, fazemos o mesmo. Em geral, os professores e os livros enfatizam que atl símbolo não representa um número, mas é apenas um signo para indicar que uma função assume valores arbitrariamente grandes. Ou, quando escreve-se que infinito somado com infinito é igual a infinito, enfatiza-se que esta não é uma operação mostrando o resultado da adição entre números, mas apenas uma representação do fato de que a soma de duas funções assume valores tão grandes quanto se queira se cada uma das funções assume valores tão grandes quanto. Ora, isto é o mesmo que nossos colegas faziam a alguns séculos atrás. Davam aos objetos que não se encaixavam às regras em vigor a categoria de "não ser", de apenas entes imaginários no desenvolvimento da teoria. Conforme estes objetos se tornavam cada vez mais presentes nos estudos, desprezá-los já não era possível. Buscava-se, então, formas de interpretá-los tentando-se enquadrá-los às categorias dos números já aceitos. Assim, foram surgindo, para estes, interpretações geométricas e aritméticas e sendo estabelecidas regras convincentes (que eram análogas as já existentes) de operação e até sua fundamentação em números já aceitos. Como, por exemplo, a concepção de número real como um corte no conjunto dos números racionais ou como uma classe de sequências de Cauchy de números racionais, de número complexo como um par ordenado de números reais ou de número hiperreal como uma classe de sequência de números reais. O mesmo acontece agora com os transreais. Eles receberam uma fundamentação a partir dos reais (REIS, GOMIDE e ANDERSON, 2016). Desta forma, esta categoria de número não tem o caráter apenas intuitivo nem apenas o axiomático, mas também pode ser encarada como consequência dos números reais. A consistência dos números transreais está fundamentada, então, na consistência dos números reais. Em diversos momentos na história, a matemática passou por discussões epistemológicas e de legitimação de seus conceitos. Mergulhado nestas discussões esteve o conceito de número. Como afirma Abraham Robinson[1], citado por Dauben (1988), a coleção de todos os sistemas numéricos não está totalmente finalizada, mas tem sido, e será, uma área crescente e dinâmica, agregando novos sistemas e descartando ou engavetando antigos.

[1] ROBINSON, A. Numbers What Are They e What Are They Good For? *Yale Scientific Magazine*, 47, 1973, p. 14-16.

Referências

ANDERSON, James A. D. W. 2005. Perspex machine II: visualisation. In: *Vision Geometry XIII Proceedings of the SPIE*, **vol. 5675**. 100 111.

ANDERSON, James A. D. W.; VÖLKER, Norbert e ADAMS Andrew A. 2007. Perspex Machine VIII: axioms of transreal arithmetic. In: *Vision Geometry XV Proceedings of the SPIE*, **vol. 6499**. 649903.1 649903.12.

DAUBEN, Joseph. W. 1988. *Abraham Robinson and Nonstandard Analysis: History, Philosophy, and Foundations of Mathematics*. In: William Aspray e Philip Kitcher, eds. History and philosophy of modern mathematics, Minnesota Studies in History and Philosophy of Science XI, in Minneapolis, MN, 1985, University Minnesota Press, Minneapolis, MN. 177 200.

IFRAH, Georges. 2005 (11ª Ed.). *Os números: história de uma grande invenção*. São Paulo: Globo.

MARTINEZ, Alberto. A. 2012. *The Cult of Pythagoras: Math and Myths*. University of Pittsburgh Press.

REALE, Giovanni e ANTISERI, Dario. 2003 (1ª Ed.). *História da Filosofia*. São Paulo: Paulus, **vol. 1**.

REIS, Tiago S. dos. 2015. *Transmatemática* [tese], Rio de Janeiro.

REIS, Tiago S. dos. *Os números transreais, a transmatemática e a divisão por zero em disciplinas optativas nas licenciaturas em matemática e em física*. In: IV Congresso Nacional de Educação, 2017, João Pessoa, Anais IV CONEDU.

REIS, Tiago S. dos; GOMIDE, Walter; ANDERSON, James A. D. W. 2016. Construction of the transreal numbers and algebraic transfields. In: *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, **vol. 46**, **nº 1**. 11 23.

REIS, Tiago S. dos; KUBRUSLY, Ricardo. S. 2015. Divisão por zero e desenvolvimento dos números transreais. In: *Synesis*, **vol. 7**, **nº 1**. 139 154.

ROQUE, Tatiana. 2012 (1ª Ed.). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.