

Transporte de Calor em Sólidos com Forma Arbitrária via Software não Comercial

Rafael Teles Cruz Silva¹; Joseane Freire Pereira²; Ivonete Batista dos Santos³

¹*Graduando em Química Industrial. Departamento de Química. Universidade Estadual da Paraíba.
E-mail: rafael_teles14@hotmail.com*

²*Graduanda em Licenciatura em Física. Departamento de Física. Universidade Estadual da Paraíba.
E-mail: joseanefreirercc@gmail.com*

³*Professora. Departamento de Física. Universidade Estadual da Paraíba.
E-mail: ivoneetbs@gmail.com*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estimular a comunidade acadêmica a utilizar em seus trabalhos de PIBIC, principalmente, softwares não comerciais para simular por exemplo o transporte de calor em sólidos com forma arbitrária. Para atingir tal objetivo faz-se necessário um estudo preliminar sobre transferência de calor por difusão, operações com os softwares escolhido e uma boa interpretação dos gráficos criados para representar o fenômeno físico. O processo aqui estudado é chamado de secagem, ou seja, são operações de desidratação que se intensificam com o movimento de migração de umidade do interior do sólido para sua superfície em forma de líquido e/ou vapor dependendo do tipo de produto e do percentual de umidade presente no mesmo. Para descrever teoricamente o processo de secagem de forma mais precisa, é importante considerar o fator forma do corpo no desenvolvimento do modelo matemático, de modo a descrever o fenômeno físico, de forma mais real, e elevar o nível de confiança do modelo proposto, para isso, demonstraremos o processo de secagem em sólidos de várias formas, mostrando a transferência de calor resultante da interação entre estes e o ar de secagem, através da teoria de difusão líquida, via método integral baseado em Galerkin, método GBI, considerando as propriedades termo físicas constantes e condições de contorno de equilíbrio na superfície. Os resultados da distribuição de teor de umidade superficial e sua respectiva cinética de secagem são apresentados graficamente por meio de diferentes softwares.

Palavras-chave: Calor, Método GBI, Simulação

Introdução

A utilização de softwares tem facilitado a formação acadêmica de muitos alunos que estão interessados na vida de pesquisador. Além disso, eles oferecerem possibilidades de aulas interativas aos docentes, o que ajuda a engajar os estudantes, aumentando a compreensão durante as aulas e os preparando para o futuro em diversas disciplinas. Neste trabalho, utilizaremos o software Mathematica, para simular o transporte de calor em sólidos de forma arbitrária, particularizando o estudo para placas cerâmicas.

Para mostrar tal processo, faz-se necessário a utilização de um modelo matemático que possa descrever a transferência de calor de forma precisa, levando em consideração o fator forma do corpo e as suas propriedades termo-físicas. Desse modo, é de suma importância inserir ao máximo todos os efeitos e detalhes dentro dos modelos matemáticos para tornar possível descrever com grande realismo o processo de transferência de calor, diante das condições estabelecidas, aumentar consideravelmente a confiabilidade dos resultados obtidos (OLIVEIRA, 2006).

Assim, considerando apenas a transferência de calor, desenvolveremos um modelo matemático que solucione os problemas relacionados a difusão de calor transiente em placas cerâmicas via método integral baseado em Galerkin utilizando condições de contorno de equilíbrio, e mostraremos os resultados gráficos da cinética de secagem e do teor de umidade adimensional, obtidos através dos softwares Grapher e Surfer, respectivamente, os quais possibilita a criação de gráficos de qualidade para publicação em minutos.

Metodologia

Os autores envolvidos na atual pesquisa se juntaram com o intuito de estudar a secagem de sólidos porosos, cuja composição, principal, é a argila. Porém, essa matéria prima para se tornar corpos cerâmicos como as placas cerâmicas, bastante usadas em construções civis, passa por um processo longo e complexo de secagem que deve ser cuidadoso de modo a evitar trincas e deformações que são problemas comuns que acometem a sua produção.

A secagem tem a finalidade de remover um líquido volátil contido num corpo através de evaporação envolvendo a transferência de calor e massa nesse processo, então é necessário realizar cálculos que possam prever os resultados possíveis através de um modelo matemático eficiente e evitar perda de recursos.

Segundo Santos et al. (2011) a secagem é usada nas indústrias agrícolas para remover o líquido do interior do produto possibilitando a conservação e uma maior durabilidade do mesmo, sem a perda do seu valor nutricional, além de facilitar a manipulação, o transporte e a armazenagem. Já no processo de fabricação de cerâmicas existem várias etapas, em uma delas a secagem está inserida, ela é responsável pela retirada da água que foi adicionada em outras etapas do processo e pelas propriedades finais dos produtos (BATISTA et al. 2008).

As deformações podem acontecer como consequência da diferença significativa entre os valores da taxa de difusão de água que migra do interior do produto e, a taxa de evaporação da água que ocorre na superfície, fazendo com que o corpo seque e encolha, resultando em uma superfície cada vez mais inelástica, possibilitando o aparecimento de trincas (NASCIMENTO et al., 2007).

Assim, para o processo de secagem, transporte de calor, de sólidos com forma arbitrária, em particular, placa plana, algumas considerações foram estabelecidas, são elas:

- (a) o sólido é homogêneo e isotrópico;
- (b) à princípio, a distribuição da umidade no interior do sólido é uniforme na medida em que a temperatura aumenta;
- (c) as propriedades termo físicas permanecem inalteradas durante a secagem;
- (d) o sólido é constituído por água na fase líquida e matéria seca;
- (e) a secagem ocorre com a retirada de água do interior do sólido por difusão e evaporação de água na superfície do mesmo.

Para representar a transferência de calor no interior de sólidos com geometrias variadas, sem geração de energia, foi usada equação de difusão de calor, descrita pela Lei de Fourier como sendo (Keey, 1972; Incropera e De Witt, 1992):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (1)$$

onde: T é temperatura; ρ é a densidade do meio, c_p é o calor específico a pressão constante e k é a condutividade térmica do meio.

Considerando ρ , c_p e k constantes, a Equação (1) passou a ser representada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) \quad (2)$$

na qual: $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ representa a difusividade térmica.

A Equação (2), em coordenadas cartesianas, é escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3)$$

A solução da Equação (3) é dada por (PAYNE et al., 1986), dada pela equação seguinte:

$$T = \sum_{n=1}^N C_n \psi_n(x, y) e^{-\gamma_n t} + T_e \quad (4)$$

onde: C_n é a n-ésima constante a ser determinada, ψ_n é a n-ésima autofunção, γ é o n-ésimo autovalor e T_e é a temperatura de equilíbrio.

Substituindo a Equação (4) na Equação (2), obtivemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[T = \sum_{n=1}^N C_n \psi_n(x, y) e^{-\gamma_n t} + T_e \right] = \nabla \left[\alpha \nabla \left(T = \sum_{n=1}^N C_n \psi_n(x, y) e^{-\gamma_n t} + T_e \right) \right] \quad (5)$$

Considerando C_n , γ_n , T_e e α constantes, e ψ_n independente do tempo, uma nova equação é obtida:

$$\sum_{n=1}^N [\psi_n \gamma_n + \nabla(\alpha \nabla \psi_n)] = 0 \quad (6)$$

sendo ψ_n uma função obtida por uma combinação linear de um conjunto de funções de base dado por:

$$\psi_n = \sum_{j=1}^N d_{nj} f_j \quad (7)$$

na qual f_j representa um conjunto de funções de base e d_{nj} é um elemento que representa as constantes a serem determinadas. O elemento f_j é conhecido também por ser a função de Galerkin.

Substituindo a Equação (7) na Equação (6), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^N d_{nj} [\gamma_n f_j + \nabla(\alpha \nabla f_j)] = 0 \quad (8)$$

Aplicando o método de Galerkin que é caracterizado por multiplicar uma equação por $fidV$ e integrar sob o volume, na Equação (8), (KANTOROVICH; KRYLOV, 1960), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^N d_{nj} \left[\frac{1}{V} \int_V f_i f_j \gamma_n dV + \frac{1}{V} \int_V f_i \nabla \cdot (\alpha f_j) dV \right] = 0 \quad (9)$$

Utilizando o método de Cholesky, a Equação (9) pode ser escrita na forma de matriz como:

$$(\bar{A} + \gamma_n \bar{B}) \bar{d}_n = 0 \quad (10)$$

onde \bar{A} e \bar{B} são matrizes quadradas de $N \times N$ elementos, cujos valores podem ser calculados a partir de:

$$a_{ij} = \frac{1}{V} \int_V f_i \nabla \cdot (\alpha \nabla f_j) dV \quad (10.a)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{V} \int_V f_i f_j dV \quad (10.b)$$

Após o cálculo das matrizes \bar{A} e \bar{B} , é possível determinar os valores de γ_n e \bar{d}_n Utilizando a identidade seguinte, pode-se aplicar as condições de contorno ao problema:

$$\int_V f_i \nabla \cdot (\alpha \nabla f_j) dV = \int_V \nabla \cdot (\alpha f_i \nabla f_j) dV - \int_V \alpha \nabla f_i \nabla f_j dV \quad (11)$$

A Equação (11) pode ser escrita da seguinte forma se α for considerado constante:

$$\int_V f_i \nabla \cdot (\alpha \nabla f_j) dV = \int_V \alpha f_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial n} \right) dS - \int_V \alpha \nabla f_i \nabla f_j dV \quad (12)$$

Para condições de contorno homogêneas de equilíbrio, o valor de f_j é igual a 0, ou seja, um lado vai ser sempre zero e o outro será sempre simétrico.

Os coeficientes C_n da Equação (4) agora podem ser obtidos aplicando a condição inicial em $t = 0$. Assim, $T = T_0$ o que resulta em:

$$T_0 = \sum_{n=1}^N C_n \psi_n + T_e \quad (13)$$

Utilizando novamente o método de Galerkin (KANTOROVICH; KRYLOV, 1960) na Equação (13) obtém-se:

$$\int_V f_i (T_0 - T_e) dV = \int_V f_i \sum_{n=1}^N C_n \psi_n dV \quad (14)$$

a solução resultará em um conjunto N de equações algébricas que possibilitará o cálculo para encontrar os valores C_n e resolver a solução do problema.

O valor médio da temperatura interna do sólido com forma arbitrária é obtido através da equação:

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \int_V T dV \quad (15)$$

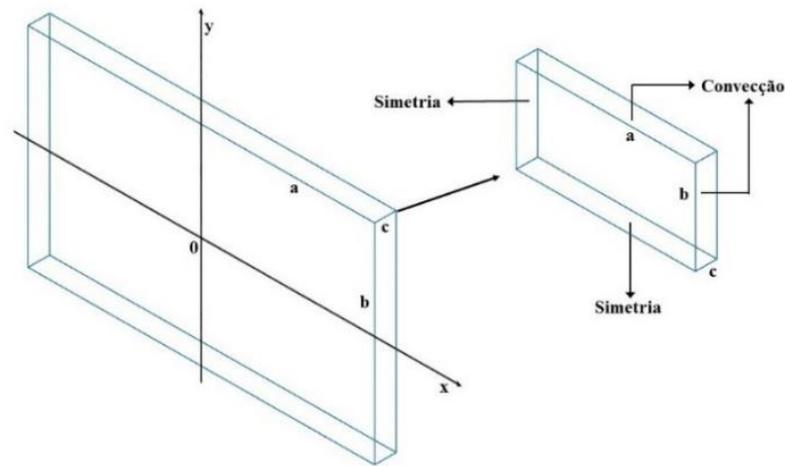
onde V é volume do sólido em estudo.

Dessa forma, a solução para processo de difusão em sólidos com geometrias variadas é obtida.

Aplicação

A metodologia mostrada no presente trabalho será utilizada para demonstrar o processo de secagem na placa cerâmica conforme a Figura (1).

Figura 1: Contorno da placa cerâmica retangular estudada cuja definição de função de base foi demonstrada por (SANTOS, 2013)



A Figura (1) é representada pela seguinte função de base:

$$f_j^{(1)} = f_{xi} \cdot f_{yj} \quad (16)$$

ou ainda:

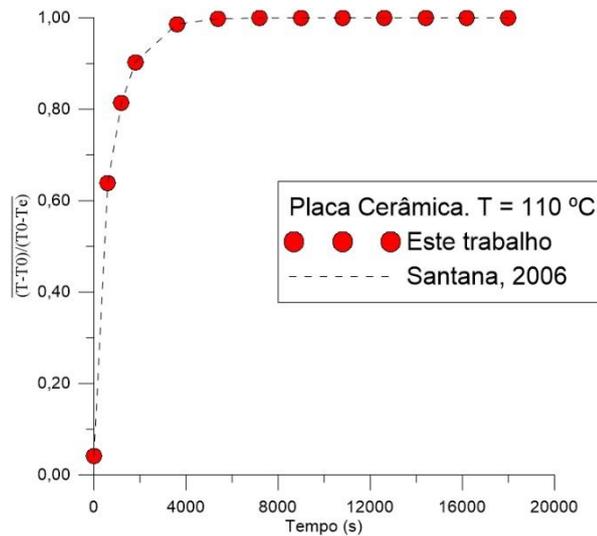
$$f_j^{(1)} = (-2a^2 - a^3 B_2 + a B_2 x^2)(-2b^2 - b^3 B_4 + b B_4 y^2) \quad (17)$$

Um código computacional foi criado para simular o processo de secagem da placa cerâmica e obedece ao protocolo proposto pela plataforma Mathematica®, versão 7.0 (WOLFRAM, 2009).

Resultados

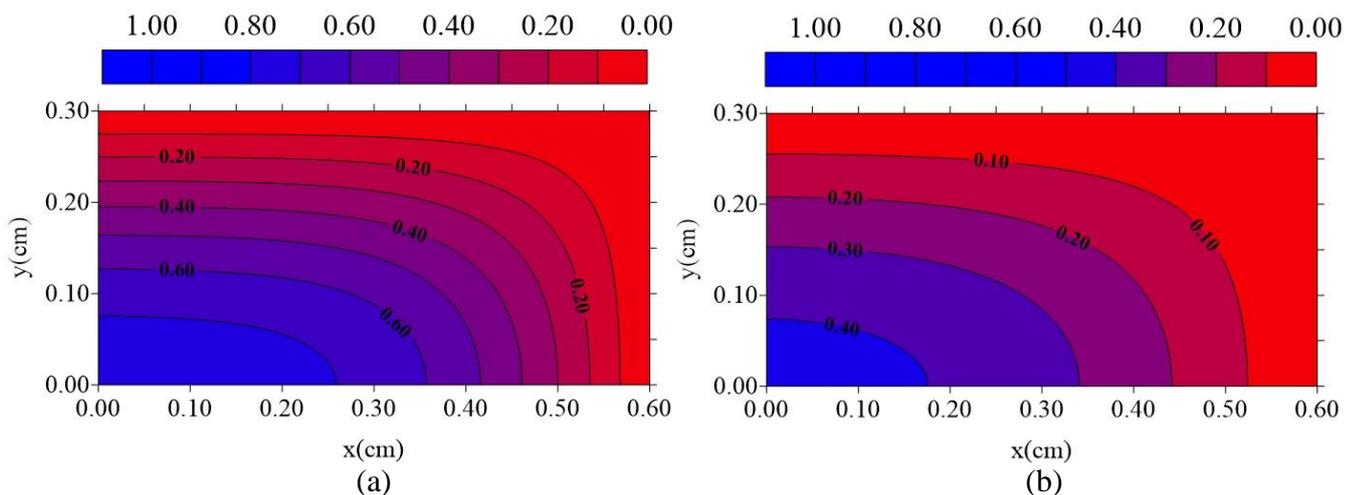
Para a validação do presente trabalho, foram utilizados os dados experimentais obtidos por (SANTANA, 2006) para as mesmas condições de secagem à 110°C. Considerando-se uma placa cerâmica que possuía dimensões aproximadas de 12,0 x 6,0 x 0,7 cm³ com $\phi_0 = 0,103$ de umidade. A Figura (2) apresenta as respectivas curvas de secagem usadas como comparação. É possível notar que a temperatura atinge o equilíbrio aproximadamente aos 4000 s para ambos, o que torna efetiva a validação. A análise gráfica foi realizada através da plataforma Grapher, que permitiu a análise e comparação entre o presente trabalho e o da literatura citada.

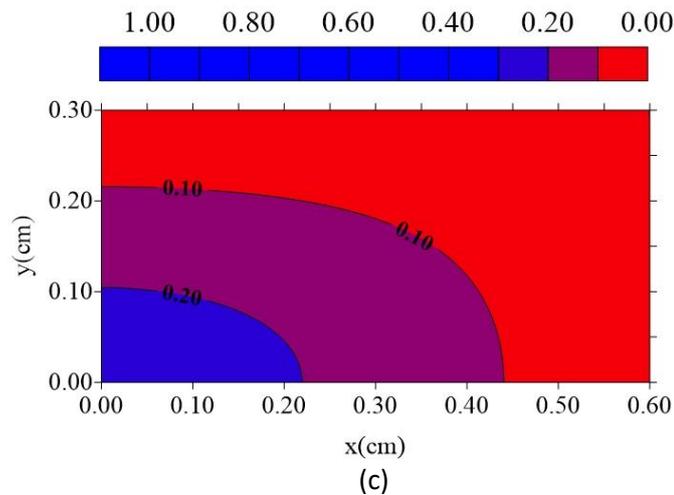
Figura 2: Cinética de comparação entre os resultados apresentados neste trabalho e os dados experimentais obtidos por (SANTANA, 2006).



A Figura (3) representa a distribuição da temperatura nos instantes: (a) $t = 600$ s; (b) $t = 1200$ s e (c) $t = 1800$ s à 110°C na superfície da placa cerâmica.

Figura 3: Distribuição de temperatura no interior do sólido para os tempos: (a) $t = 600$ s ($F_0 = 0,361625$), (b) $t = 1200$ s ($F_0 = 0,185345$) e (c) $t = 1800$ s ($F_0 = 0,0968424$)





A partir da Figura (3) é possível notar que o processo ocorre homogeneamente, com um padrão bem definido. As bordas da placa aquecem mais rápido por estarem em contato direto com o ar de secagem, então a umidade diminui rapidamente nessas áreas, por isso precisam de um cuidado maior e detalhado por terem mais chances de sofrer deformações. Conclui-se, também, que à medida que o tempo aumenta, ocorre uma diminuição na umidade no interior do corpo e um aumento de temperatura de forma contínua.

As curvas da cinética de secagem foram construídas utilizando-se a plataforma Surfer, o que permitiu a visualização do processo de secagem ao longo do tempo.

Conclusão

Vemos a partir do presente trabalho que, a inovação da utilização de softwares para realização de simulações e criação de gráficos permite aos alunos uma maior atuação em várias áreas da Física-Matemática, Matemática Computacional Química e Engenharia, pois o mesmo coloca a disposição da comunidade, importantes conhecimentos científicos, para que dessa forma, possam aplicá-los no âmbito do ensino e da pesquisa.

Concluimos, a partir da análise dos resultados obtidos, que o modelo matemático utilizado para obter a solução analítica do problema foi eficiente, pois permitiu a observação do processo, e é aplicável a outros problemas transientes tais como resfriamento e umidificação; que a teoria de difusão possibilita obter a distribuição de temperatura no interior do sólido; que a razão de aspecto e/ou a forma do corpo exerce influência direta sobre a velocidade do processo de secagem do sólido, uma vez que esse parâmetro está diretamente associado com a relação área/volume.

Também verificou-se que os maiores gradientes de temperatura ocorrem nas pontas do sólido, no caso, a placa plana, por estarem diretamente ligadas ao ar de secagem.

Referências

BATISTA, V. R.; LIMA, A. G. B.; NASCIMENTO, J. J. S. **Secagem e queima de tijolos cerâmicos vazados incluindo variações dimensionais e danos estruturais**. Revista eletrônica de materiais e processos.2008.

COLE, K. D.; BECK, J. V.; HAJI-SHEIKH, A.; LITKOUHI, B. **Heat Conduction Using Green's Functions**. Boca Raton. CRC Press Taylor & Francis., 2nd ed., 2011.

INCROPERA, F.P.; DEWITT, D.P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**, 3a edição, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., R. J. 1990.

KANTOROVICH, L. V. e KRYLOV, V. I., **Approximate methods of higher analysis. Advanced Calculus**, Wiley, New York, USA, 1960.

NASCIMENTO, José Jefferson da Silva; BATISTA, Valmir Rodrigues; LIMA, A. G. B. . **Estudo Experimental da Secagem de Tijolos Cerâmicos Maciços e Vazados**. In: 51o Congresso Brasileiro de Cerâmica, 2007, Salvador-BA. Anais do 51o Congresso Brasileiro de Cerâmica, 2007. v. 1. p. 1-12.

OLIVEIRA, V. A. B. **Transferência de calor e massa no interior de sólidos com forma esferoidal prolata via termodinâmica dos processos irreversíveis**, Campina Grande: Pós-Graduação em Engenharia de Processos, Universidade Federal de Campina Grande, 2006. 150 p. Exame de Qualificação (Doutorado).

PAYNE, F. R., CORDUNEANU, C. C., HAJI-SHEIKH, A, e HUANG, T., **Integral methods in science and engineering. Chapter: On solution of parabolic partial differential equations using Galerkin functions**. Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA, 1986.

SANTANA, E. W. F., **Avaliação da secagem e queima de placas cerâmicas**, Dissertação (Mestrado em Ciências e Engenharia de Materiais). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande, 87 P., 2006.

SANTOS, I. B., **Transporte de calor e massa em sólidos com forma arbitrária via método integral baseado em Galerkin: modelagem e simulação**. Tese (Doutorado em Engenharia de

Processos). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, 164 p., 2013.

SANTOS, I. B.; SILVA, L. P. de L.; LIMA, A. G. B., **Diffusion in solids of Revolution via Galerkin-based method**. In: Brazilian Congresso of Mechanical Engineering, 21, 2011, Natal. **Proceedings of COBEM**. Natal, 2011.

WOLFRAM, S., **The Mathematica® Book**. Cambridge University Press, New York, 2009.