

O ENSINO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS POR MEIO DO JOGO TORRE DE HANÓI

Wendson César Silva do Nascimento; Felipe Fernandes Coutinho; José Wellington Santos de Souza; Claudilene Gomes da Costa; Agnes Liliane Lima Soares de Santana.

Universidade Federal da Paraíba, wendson_cesar@hotmail.com; Universidade Federal da Paraíba, coutinhof62@gmail.com; Universidade Federal da Paraíba, wellingtonpalmeira11@hotmail.com; Universidade Federal da Paraíba, claudilene@dcx.ufpb.br; Universidade Federal da Paraíba, agnes@dcx.ufpb.br.

Resumo

Conscientes da necessidade de se abandonar o modelo tradicional de ensino da matemática, buscando metodologias alternativas que simplifiquem o processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina e concomitantemente promova nos alunos o desenvolvimento de um pensamento crítico e independente, o presente trabalho tem por objetivo relatar uma experiência de uma oficina realizada pelos bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), da UFPB/CAMPUS IV, em uma escola da rede estadual do município de Mamanguape – PB, com alunos de uma turma do 1º ano do ensino médio. O objetivo da atividade foi explorar alguns conceitos matemáticos de forma lúdica através do jogo Torre de Hanói, diferentemente da forma que normalmente estes conceitos são apresentados em sala de aula, de modo a influenciar positivamente no processo de ensino-aprendizagem dos alunos participantes já que este jogo é considerado por estudiosos como um potente recurso didático-metodológico para o ensino de conceitos matemáticos por induzir o aluno a perceber as leis matemáticas a ele relacionadas, sobretudo, trabalhar com o desenvolvimento de habilidades mentais. Deste modo, apresentamos neste trabalho uma atividade utilizando o jogo Torre de Hanói como instrumento facilitador no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Função Exponencial e Progressão Geométrica. O desenvolvimento metodológico da atividade proposta consistiu na utilização do jogo Torre de Hanói para introduzir de maneira intuitiva os conceitos dos conteúdos matemáticos já citados, por meio da exploração da lenda que envolve este jogo. Com esta oficina buscou-se despertar nos alunos a curiosidade de deduzir por meio dos diferentes níveis de complexidade do jogo a existência da relação entre o número de discos e o número mínimo de movimentos necessários para transportar cada disco, instigando-os a conhecer o conceito formal e as propriedades da Função Exponencial e da Progressão Geométrica.

Palavras-chave: Jogo, Ensino da Matemática, Função Exponencial, Progressão Geométrica.

Introdução

D' Ambrósio (1991, p.1) afirma que “[...] há algo errado com a matemática que estamos ensinando. O conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil”. Diante das palavras deste autor, é notória a necessidade de se abandonar o modelo tradicional de ensino da matemática, buscando metodologias alternativas que simplifiquem o processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina e concomitantemente promovam nos alunos o desenvolvimento de um pensamento crítico e independente.

A utilização de jogos, desafios e atividades lúdicas em sala de aula, traz como uma das consequências, a motivação dos alunos. Complementando esta ideia, Tarouco (2004) afirma que:

De uma forma geral, os jogos fazem parte da nossa vida desde os tempos mais remotos, estando presentes não só na infância, mas como em outros momentos. Os jogos podem ser ferramentas instrucionais eficientes, pois eles divertem enquanto motivam, facilitam o aprendizado e aumentam a capacidade de retenção do que foi ensinado, exercitando as funções mentais e intelectuais do jogador. (TAROUCO, 2004, p.1)

Existem inúmeros argumentos para a utilização dos jogos em sala de aula evidenciando a sua importância para a potencialização da aprendizagem do nosso aluno atual. Nessa perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), apresentam relevantes contribuições para assessorar o professor na introdução de jogos no ensino de Matemática, destacando que:

[...] estes constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. Propicia a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações [...] (BRASIL, 1998. p. 46).

Os PCN (BRASIL, 1998) ainda aconselham a inserção de jogos no ensino de Matemática como uma forma de incorporação e implementação das competências e habilidades matemáticas. É de responsabilidade do professor planejar atividades lúdicas que agucem a curiosidade do aluno inserindo-o em contextos que o permita vivenciar situações que utilize seus conhecimentos matemáticos.

Nesta esteira, as oficinas pedagógicas de jogos didáticos têm como propósito facilitar conteúdos considerados complicados pelos alunos, assim como também despertar neles o interesse em aprender Matemática, pois essas atividades possibilitam que conteúdos sejam abordados de maneira lúdica e contextualizada, facilitando assim o processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina.

Neste sentido destacamos o jogo Torre de Hanói por potencializar o desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo, tendo o jogador que transferir com o menor número de movimentos possíveis uma pilha de discos de uma haste para outra obedecendo às regras para a movimentação de cada peça. Defendemos a utilização deste jogo como instrumento auxiliador no ensino do conteúdo de Função Exponencial e de Progressão Geométrica. Dessa

forma, torna-se indispensável aos processos pedagógicos apreciarem a importância de se ampliar à experiência dos alunos a fim de proporcionar-lhes momentos de atividade criadora.

De acordo com Schmitt e Ferreira (2004), os materiais concretos são elementos facilitadores que permite que os alunos aprofundem e ampliem seus conhecimentos dando maior significado as situações e atividades matemáticas que desenvolvem no espaço escolar e levando esta compreensão para o mundo.

Neste aspecto, o jogo a Torre de Hanói proporciona uma maneira lúdica, concreta e simplificada de se iniciar a contextualização dos conteúdos de Função Exponencial e de Progressão Geométrica no currículo do ensino médio, pois permite o aluno manusear, analisar, inferir e incorporar a ideia de crescimento exponencial e de razão de uma progressão geométrica através da utilização de material concreto, principalmente depois da institucionalização do novo ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), obrigando todos os sistemas de ensino a reorganizarem seus currículos em um âmbito de ensino mais integrado e contextualizado (SILVA, 2015).

Sendo assim, o presente trabalho relata uma atividade desenvolvida por bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de Licenciatura em Matemática do Campus IV - Rio Tinto, aplicada na Escola Estadual de Ensino Médio Senador Rui Carneiro na cidade de Mamanguape - PB, tendo como público alvo alunos do 1º ano do Ensino Médio. O objetivo da atividade foi explorar o conteúdo de Função Exponencial e Progressão Geométrica de forma lúdica através do jogo Torre de Hanói, diferentemente do modo que normalmente é apresentado em sala de aula, influenciando positivamente no processo de ensino e aprendizagem dos alunos participantes já que este jogo é considerado por estudiosos como um potente recurso didático-metodológico para o ensino de conceitos matemáticos por induzir o aluno a perceber as leis matemáticas a ele relacionadas, sobretudo, trabalhar com o desenvolvimento de habilidades mentais, tais como: desenvolver um plano de ação durante as jogadas, capacidade de concentração, o trabalho com algoritmos matemáticos, estabelecer relações interpessoais em um trabalho colaborativo e promover o desenvolvimento da capacidade cognitiva.

Metodologia

Partindo do jogo Torre de Hanói, proporemos aos alunos um problema - descobrir com o auxílio da calculadora uma generalização que permitisse determinar o número mínimo de movimentos para mudar os discos que compunham o jogo de uma haste para outra. Na descoberta da generalização, muitos conceitos matemáticos serão abordados, numa perspectiva investigativa envolvendo os bolsistas do PIBID e os alunos.

Iniciaremos a oficina realizando uma abordagem histórica, contando aos participantes quem desenvolveu o jogo Torre de Hanói, quando e onde, bem como sua finalidade e seus principais aspectos físicos e metodológicos. Em seguida, continuaremos com a leitura compartilhada da história “Uma lenda: Torre de Hanói” (Fonte: Coleção Explorando o Ensino) que traz a lenda que deu origem ao jogo Torre de Hanói, conforme a seguir:

Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: “Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez, e nunca permitindo que um disco fique acima de um menor. Quando terminarem esta tarefa, e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá à pó, e com um estrondo de trovões o mundo acabará.” Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos, na razão de um disco por segundo. Será que veremos o mundo acabar? (WATANABE, R., 2004, p. 132-135).

Procederemos com a apresentação do jogo (material concreto para manipulação e realização), bem como das seguintes regras necessárias para o seu desenvolvimento: transferir todos os discos de um pino para o outro; transferir apenas um disco por movimento; utilizar um pino como auxiliar; colocar os discos sempre na ordem decrescente, ou seja, o disco maior nunca deverá sobrepor um menor; realizar o menor número de movimentos possíveis.

Após a apresentação, questionaremos os alunos (nesta etapa, os alunos devem ser divididos em duplas) sobre como eles procederiam na resolução da Torre de Hanói para 3, 4 e 5 discos, ao mesmo tempo será entregue uma tabela auxiliar relacionando o número de discos com o número mínimo de movimentos necessários para o seu deslocamento para ser preenchida pelos alunos durante as jogadas.

Tabela 1 – Número mínimo de movimentos para 5 peças

| Quantidade de movimento de cada disco | | | | | | |
|---------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------------------|
| Quantidade de discos | Disco 1 | Disco 2 | Disco 3 | Disco 4 | Disco 5 | Total de movimentos |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| n | | | | | | |

Fonte: A Torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas, autor: Claudenor Ancelmo da Silva – UFERSA.

Após o preenchimento da tabela, serão feitos aos participantes alguns questionamentos sobre os resultados obtidos durante as jogadas. Questionaremos sobre quantos movimentos cada um realizou para transferir a torre da primeira para a terceira haste, se a quantidade de movimentos foi a menor possível, sobre a quantidade de movimentos de cada peça e sobre a relação existente entre as quantidades de movimentos necessários pra transferir cada peça da torre.

Discutiremos a relação existente entre o número de discos e o número mínimo de movimentos necessários para solucionar o problema, visando montar com os alunos uma estratégia de vitória. Discutiremos também a lei de formação da sequência que relaciona o número de peças com o número de jogadas a partir de conclusões retiradas das ideias da tabela, bem como associar o rápido crescimento e decréscimo da dificuldade desse jogo ao ritmo de crescimento e decréscimo da função exponencial.

Logo após determinarmos a lei de formação da sequência bem como a quantidade mínima de movimentos necessários para concluir cada jogada, pediremos para que os alunos, de acordo com a lenda, calculem com o auxílio da calculadora quanto tempo levaria para acabar o mundo supondo que os monges levassem 1 segundo para movimentar cada peça.

Para concluirmos a atividade solicitaremos que cada dupla construa o gráfico que represente a relação entre o número de peças e o número de movimentos mínimos para se realizar o jogo.

Resultados e Discussão

Após a abordagem histórica e leitura da lenda permitimos que os alunos manipulassem o jogo (material concreto) para que eles se familiarizassem com o mesmo, deixando-os brincar livremente. Ao passo em que fomos explicando as regras, passamos a acompanhar o desenvolvimento do jogo segundo as regras estabelecidas. Percebemos que algumas duplas ainda estavam meio perdidas em relação às jogadas, desta forma sugerimos que os alunos jogassem inicialmente com apenas dois discos e que eles observassem sempre se os movimentos realizados por eles para transferir cada disco de uma haste para a outra era realmente a quantidade mínima de movimentos necessária para concluir a jogada. Somente após percebermos que eles haviam dominado os movimentos, ou seja, que eles estavam movendo os discos de acordo com as regras do jogo foi que os desafiamos a tentarem consequentemente com três, quatro e cinco discos. Neste momento entregamos a tabela auxiliar para que cada dupla anotasse o número de movimentos realizados para a transferência de cada disco para que depois pudéssemos comparar os resultados de cada uma. Ao questionarmos se a quantidade de movimentos era alterada a partir do momento em que se aumenta o número de discos, todos responderam que sim.

Ao analisarmos as tabelas de cada dupla, percebemos quantidades de movimentos diferentes principalmente para a transferência dos discos quatro e cinco. Ao indagarmos sobre o total de movimentos que eles haviam utilizado para transferir a torre de uma haste para outra, identificamos que apenas uma dupla conseguiu o objetivo com a quantidade mínima de movimentos necessários. Aproveitamos também para questioná-los se eles utilizavam alguma estratégia de movimentação dos discos para se obter essa quantidade de movimentos, no

entanto os mesmos não conseguiram responder. A partir daí passamos a construir juntos a generalização da fórmula que representa a quantidade mínima de movimentos.

Tomando como referência a tabela dos alunos que conseguiram terminar o jogo com a quantidade mínima de movimentos, ao analisarmos a coluna que continha o total de movimentos percebemos que do termo anterior para o termo seguinte o número somado é sempre o dobro do anterior que já havia sido somado e que o resultado da quantidade mínima de movimentos necessários para concluir cada jogada é sempre um a menos do número que foi somado. Portanto, o número somado é um número do tipo 2^n , e assim a sequência de números somados forma a PG: (2,4,8,16,32,...) de razão $q = 2$. Logo, a quantidade mínima de movimentos é igual ao número somado menos 1, ou seja, igual a $2^n - 1$. Então descobrimos que $(T) = 2^n - 1$.

Quando os alunos calcularam, de acordo com lenda, quanto tempo o mundo levaria para acabar, ficaram surpresos com a resposta, pois perceberam que para transferir uma pilha contendo 64 discos de um bastão para outro, conforme as regras estabelecidas, eram necessários $2^{64} - 1 = 18.446.073.709.551.615$ movimentos. Deste modo, sabendo que os monges levavam 1 segundo para movimentar cada peça, chegaram à conclusão de que seriam necessário 584.542.046.000 anos para transportar os 64 discos.

Por fim, quando as duplas começaram a construir o gráfico que representava a relação entre o número de peças e o número de movimentos mínimos para se realizar o jogo, associamos o rápido crescimento e decréscimo da dificuldade desse jogo ao ritmo de crescimento e decréscimo da função exponencial.

Conclusões

É evidente que a utilização de métodos tradicionais já não são suficientes para despertar o interesse dos alunos, deste modo se faz necessário buscar metodologias alternativas que contribuam no processo de ensino e aprendizagem tornando o ensino da Matemática mais atraente, divertido e motivador, possibilitando o aumento do interesse dos estudantes pela disciplina, fazendo com que eles se sintam mais envolvidos e participantes em sua formação.

Sendo assim, a utilização do jogo torre de Hanói como instrumento auxiliador de ensino, permitiu a discussão de conceitos matemáticos sobre um novo olhar, possibilitando

aos alunos uma melhor compreensão dos conteúdos de Função Exponencial e Progressão Geométrica.

No desenvolvimento dessa oficina, embora os alunos estivessem um pouco resistentes inicialmente, à medida que fomos avançando na atividade eles foram se mostrando mais participativos. Isso mostrou o quanto é importante possibilitarmos um ambiente em que o aluno sintasse livre para se expressar, criar e desenvolver seu raciocínio, descobrindo, por si só, caminhos diferentes para se chegar a uma mesma resposta. Deste modo, mesmo sem perceberem, os alunos contribuíram de maneira eficaz no seu próprio processo de formação, pois demonstraram ter compreendido os conceitos e definições dos conteúdos abordados.

Este trabalho oferece aos docentes um novo olhar sobre a utilização de jogos como instrumento auxiliador do processo de ensino-aprendizagem, pois além de permitir que alunos e professores construam juntos as ideias que contribuirão para a organização de ideias, tomada de decisões e desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, recuperam o desejo pela busca do conhecimento e tornam a aprendizagem mais prazerosa.

Vale salientar que o jogo por si só não é suficiente para o processo de ensino-aprendizagem, sendo necessários recursos metodológicos complementares. Portanto a utilização de jogos no ensino da Matemática só será vantajosa se o professor tiver objetivos claros sobre o que pretende atingir com a atividade proposta.

Por fim, esta oficina nos possibilitou grandes contribuições para nossa formação acadêmica e principalmente como futuros professores, pois ela nos ensinou na prática a importância de se buscar atividades mais dinâmicas para o ensino da Matemática de modo a facilitar a compreensão dos conteúdos e principalmente desmistificar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'AMBRÓSIO, U. **Matemática, ensino e educação**: uma proposta global. Temas & Debates, São Paulo, 1991.

SCHMITT, C. L.; FERREIRA, C. **A Educação Matemática Escolar Relacionada ao Cotidiano do Educando**. *Revista de Divulgação Técnico-Científica do ICPG*. Blumenau: 2v, n. 6, 2004. p.14-17.

SILVA, C. A. **A torre de hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas**, Rio Grande do Norte: UFERSA, 2015

TAROUCO, L.M. R.; ROLAND, Leticia C.; FABRE, Marie-Christine J. M.; KONRATH, Mary L. P. **Jogos educacionais**. Volume 2 n°1, p.1. Porto Alegre, 2004. Disponível em: <<http://www.cinted.ufrgs.br/ciclo3/af/30-jogoseducacionais.pdf>>. Acesso em: 15 de agosto de 2017.

WATANABE, R. Uma lenda: Torre de Hanói. In: Druck, S. (org.). **Explorando o ensino da Matemática: atividades: v.2**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. p. 132-135.