GÊMEOS DE FATORAÇÃO NO ENSINO DE POLINÔMIOS: UMA EXPERIÊNCIA VIVIDA EM UMA TURMA DO ENSINO MÉDIO

Rônero Márcio Cordeiro Domingos

IF Sertão-PE Campus Salgueiro - roneromarcio@bol.com.br

RESUMO

Este artigo apresenta o relato de uma experiência vivida em uma turma do primeiro ano do ensino médio do Instituto Federal do Sertão Pernambucano Campus de Salgueiro/PE. A experiência ocorreu em uma aula sobre fatoração de polinômios de grau maior do que ou igual a dois. No decorrer dessa aula foi trabalhada com os alunos uma técnica interessante e de fácil compreensão para fatorar polinômios. Os resultados dessa experiência foram satisfatórios, uma vez que foi constatado tanto o envolvimento como a aprendizagem dos Estudantes, além do interesse dos mesmos por alguns conceitos da álgebra.

Palavras-chave: Fatoração de Polinômios; Gêmeos de Fatoração; Experiência vivida.

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, embora o conteúdo de polinômios esteja inserido no currículo escolar, parece ter havido uma nítida redução da ênfase nos tópicos relacionados com polinômios de grau maior do que ou igual a dois, em particular a fatoração de polinômios.

Visando o encontro de técnicas interessantes e de fácil compreensão envolvendo esses conceitos, foi feito uma pesquisa bibliográfica especificamente referente à fatoração de polinômios na tentativa de tornar as aulas de álgebra mais prazerosas e que possibilitasse o envolvimento dos alunos na busca pela aprendizagem.

Nessa pesquisa bibliográfica, um dos temas encontrados foi os “Gêmeos de Fatoração” que é um conteúdo que pode contribuir para a facilitação do entendimento por parte dos alunos de outros conceitos da álgebra como, por exemplo, função modular e interpretação gráfica.

Esse conteúdo foi encontrado no livro “Ideias da álgebra” organizado por Coxford e Shulte (1994). Esse livro é composto por vários artigos que apresentam técnicas importantes para trabalhar com fatoração de polinômios em sala de aula.

Essa experiência foi realizada eu uma turma de ensino médio integrado a edificações no Instituto Federal do Sertão Pernambucano Campus de Salgueiro/PE.

Para trabalhar esse tema em sala de aula foi utilizada uma metodologia de ensino que se convencionou por chamar de aula expositiva, mas, dando oportunidade para que os alunos participassem e apresentassem suas ideias e limitação.

A experiência ocorreu em dois encontros de uma hora e meia de duração em cada um.

Espera-se que a experiência apresentada neste artigo possa contribuir para o debate teórico referente ao ensino da álgebra, em particular ao ensino de polinômios e de fatoração de polinômios.

2 OS EPISÓDIOS: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE INICIAL

A ideia de trabalhar o conteúdo “gêmeos de fatoração” em sala de aula com os alunos da turma supracitada surgiu a partir do momento em que um aluno dessa turma levou para a aula algumas duvidas que surgiram ao resolver as tarefas propostas para casa referente a fatoração de polinômios de grau maior do que ou igual a dois.

O aluno expressou sua duvida da seguinte maneira:

— Professor! — exclamou o aluno — Se eu tenho dois polinômios do segundo grau idênticos mudando apenas o sinal do coeficiente linear os dois polinômios são fatoráveis? — perguntou ele. — É que eu consegui fatorar um polinômio e o outro não.

— Você pode escrever na lousa a sua duvida para que os colegas possam compartilhar na discussão? — perguntei ao aluno.

— Sim, — respondeu ele ao direcionar-se para a lousa.

Já na lousa, o estudante escreve dois polinômios que se segue abaixo:

$$x^2 + 10x + 39 \qquad\qquad x^2 + 10x - 39$$

— Nos exercícios que o professor pediu para fazer em casa, tinha esses dois polinômios. — disse o aluno ao escrever na lousa. — Consegui fatorar um deles, mais, o outro não.

— Qual foi o que você conseguiu fatorar? — perguntei em seguida.

— O segundo. — responde ele.

— Tem como você mostra para os colegas como foi que você fez?— pergunto.

Na lousa o aluno mostrou para os colegas como ele tinha fatorado um dos polinômios e seguiu o raciocínio apresentado abaixo.

— O polinômio que consegui fatorar foi esse. — diz o aluno e escreve na lousa o polinômio

$P(x) = x^2 + 10x - 39$

— A fatoração desse polinômio eu vi em um livro e pode ser escrita da seguinte forma. — diz ele ao escrever a fórmula que viu em um livro.

$$(x - x') \cdot (x - x'')$$

— Sendo que $x' \ e \ x''$ são as raízes do polinômio. — complementa a explicação.

— Para encontrar as raízes eu utilizei a fórmula do delta. — afirma e começa a copiar na lousa.

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-39)$

$\Delta = 100 + 156 \Rightarrow \Delta = 256$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \Rightarrow x = \frac{-10 \mp \sqrt{156}}{2} \Rightarrow x = \frac{-10 \mp 16}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x' = 3 \\ x'' = -13 \end{matrix}$$

— em seguida fatorei assim, — complementa a explicação.

$P(x) = x^2 + 10x - 39 = (x - 3) \cdot (x + 13)$

— E o outro polinômio não conseguiu fatorar por quê? — pergunto.

— Porque o delta deu negativo, ai não tem como encontrar as raízes. — responde rapidamente.

A partir da apresentação do aluno, percebi que a maioria da turma compartilhava a mesma duvida. Além disso, com algumas perguntas feitas em sala foi constatado que 60% dos estudantes para fatorar um polinômio do segundo grau da forma $x^2 + 5x = 0$ recorrem à fórmula convencional conhecida como fórmula de Bhaskara e às vezes pelo fato da equação não apresentar explicitamente o coeficiente linear, os alunos travam e nem a fórmula convencional conseguem aplicar.

Para facilitar a aprendizagem do aluno entende-se que o professor pode aproveitar a oportunidade de trabalhar com equações quadráticas e introduzir nesse processo a fatoração de polinômios.

Na duvida apresentada pelo aluno e compartilhada com os colegas da sala de aula, vi a oportunidade de apresentar-lhes algumas técnicas de fatoração, em particular os "Gêmeos de fatoração".

Coxford e Shulte (1994) disseram que, qualquer aluno de um curso inicial de álgebra provavelmente já teve a oportunidade de mostrar que cada um dos trinômios $x^2 + 5x \mp 6$ decompôem-se em fatores lineares com coeficientes inteiros. Mais especificamente,

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$$

$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6) \cdot (x - 1).$$

De acordo com (COXFORD e SHULTE, 1994, p.221)

> Os professores e alunos mais experientes reconhecem que esses exemplos são, de certo modo, excepcionais. Se dois trinômios do segundo grau diferem apenas pelo sinal do termo constante e um deles é fatorável sobre os inteiros, o outro em geral não o é.

Na aula me referi a $ax^2 + bx \mp c$ como gêmeos de fatoração sempre que esses dois trinômios são decomponíveis em fatores lineares sobre os inteiros. A partir da definição foram apresentados alguns exemplos, com coeficientes relativamente pequenos.

Tabela1: Exemplos de gêmeos de fatoração

$x^2 + 5x \mp 6$	$x^2 + 17x \mp 60$	$x^2 + 25x \mp 150$
$x^2 + 10x \mp 24$	$x^2 + 25x \mp 84$	$x^2 + 41x \mp 180$

$x^2 + 13x \mp 30$	$x^2 + 20x \mp 96$	$x^2 + 29x \mp 210$
$x^2 + 15x \mp 54$	$x^2 + 26x \mp 120$	$x^2 + 37x \mp 210$

Fonte: Adaptado de (COXFORD e SHULTE, 1994, p.222)

Após ter apresentado alguns exemplos de gêmeos de fatoração, outro aluno da turma perguntou:

— Professor! E como é que eu sei se dois trinômios são gêmeos de fatoração ou não?”

Comecei explicando que dois trinômios $ax^2 + bx \mp c$ são fatoráveis se, e somente se, $x^2 + bx \mp ac$ também são fatoráveis. Em seguida, foi apresentada outra maneira de identificar se dois trinômios são gêmeos de fatoração.

A segunda maneira consistiu em uma abordagem metódica conhecida como “método ac” de fatoração de $ax^2 + bx + c$. Para apresentar o “método ac” para a turma, foram trabalhados dois problemas não rotineiros.

Problema 1

Os trinômios $2x^2 + 15x \mp 27$ são ou não gêmeos de fatoração?

Para identificarmos se os trinômios são gêmeos de fatoração foi feito juntamente com os alunos uma lista dos pares de fatores do produto ac, suas somas e suas diferenças, verificamos na aula que o problema torna-se direto e que quando o valor de b aparece na soma e diferença, temos trinômios gêmeos de fatoração.

Seguimos o seguinte procedimento:

Tabela 2 – Pares de fatores de ac

54	Soma	Diferença
$54 \cdot 1$	$54 + 1 = 55$	$54 - 1 = 53$
$27 \cdot 2$	$27 + 2 = 29$	$27 - 2 = 25$
$18 \cdot 3$	$18 + 3 = 21$	$18 - 3 = 15$
$9 \cdot 6$	$9 + 5 = 15$	$9 - 6 = 3$

Fonte: Elaborada pelo autor

Após trabalharmos e explorarmos as informações contidas na tabela 2 verificou-se que quando o valor de b aparece na soma e diferença, os trinômios $2x^2 + 15x \mp 27$, são gêmeos de fatoração. Logo:

$$2x^2 + 15x + 27 \qquad\qquad 2x^2 + 15x - 27$$

$$= 2x^2 + (9x + 6x) + 27$$
$$= (2x^2 + 9x) + (6x + 27)$$
$$= x(2x + 9) + 3(2x + 9)$$
$$= (2x + 9)(x + 3)$$

$$= 2x^2 + (18x - 3x) - 27$$
$$= (2x^2 + 18x) + (-3x - 27)$$
$$= 2x(x + 9) - 3(x + 9)$$
$$= (x + 9)(2x - 3)$$

Em seguida foi pedido que os alunos determinassem um valor para b de tal forma que tornasse os trinômios $x^2 + bx \mp 36$ Gêmeos de fatoração.

Nesse caso os alunos seguiram o mesmo raciocínio empregado anteriormente.

Tabela 3 – Pares de fatores de ac

36	Soma	Diferença
$36 \cdot 1$	$36 + 1 = 37$	$36 - 1 = 35$
$18 \cdot 2$	$18 + 2 = 20$	$18 - 2 = 16$
$12 \cdot 3$	$12 + 3 = 15$	$12 - 3 = 9$
$9 \cdot 4$	$9 + 4 = 13$	$9 - 4 = 5$
$6 \cdot 6$	$6 + 6 + 12$	$6 - 6 = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor

Após analisarem os dados da tabela os alunos constataram rapidamente que não existem valores para b que torne os trinômios $x^2 + bx \mp 36$ gêmeos de fatoração, pois, não há nenhum número que apareça como soma e diferença de dois fatores simultâneos de 36.

Analisando a tabela 2, foi percebido que para determinarmos todos os valores positivos de b que torne os trinômios $x^2 + bx \mp 27$ gêmeos de fatoração, basta tomarmos b como sendo os valores da soma e da diferença dos pares de fatores de 54, como por exemplo:

Tabela 4: Todos os possíveis valores de b que tornam os trinômios $2x^2 + bx$ □ 27 GF.

Trinômios cujos valores de b é a soma dos pares de fatores de 54	Trinômios cujos valores de b é a diferença dos pares de fatores de 54
$2x^2 + 55x + 27 = (2x + 1)(x + 27)$	$2x^2 + 53x - 27 = (2x - 1)(x + 27)$
$2x^2 + 29x + 27 = (2x + 27)(x + 1)$	$2x^2 + 25x - 27 = (2x + 27)(x - 1)$
$2x^2 + 21x + 27 = (2x + 3)(x + 9)$	$2x^2 + 15x - 27 = (2x - 3)(x + 9)$
$2x^2 + 15x + 27 = (2x + 9)(x + 3)$	$2x^2 + 3x - 27 = (2x + 9)(x - 3)$

Fonte: Elaborada pelo autor**.**

Para fixar a ideia apresentou-se o problemas 2 cuja fonte é (COXFORD e SHULTE, 1994, p.223). Esse problema tem como objetivo trabalhar através dos gêmeos de fatoração outros conteúdos da matemática como, por exemplo, função modular e interpretação gráfica.

Problema 2

Resolva a seguinte equação $|x^2 - 5x| = 6$

Ao aplicar esse segundo problema, foi percebido que a partir do entendimento do conceito dos gêmeos de fatoração tornou-se mais fácil para o aluno a compreensão do conceito de funções modulares. Nesse problema os alunos conseguiram perceber a existência de quatro soluções em vez de duas.

O raciocínio seguido foi o seguinte:

Pela definição de função modular, tem-se que

$$|x| = \begin{cases} x, \; se\; x \geq 0 \\ -x, \; se\; x < 0. \end{cases}$$

Sendo assim, para resolver o segundo problema, os alunos seguiram o seguinte procedimento:

$$x^2 - 5x = 6 \quad \text{ou} \quad -(x^2 - 5x) = 6$$

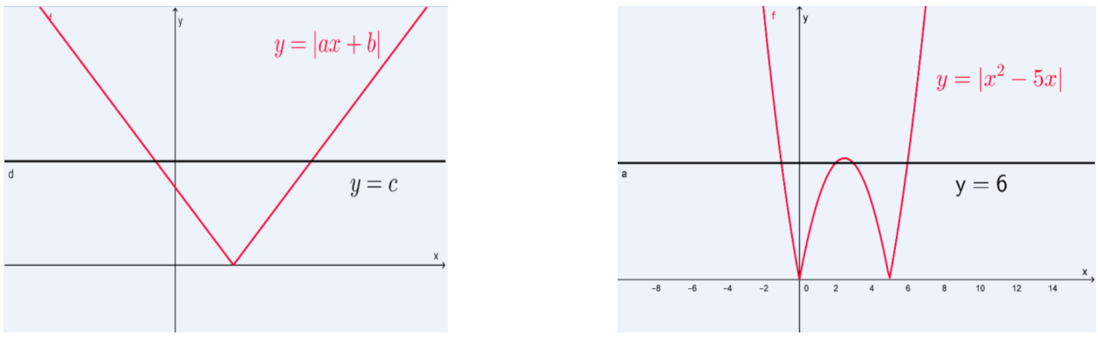
$$x^2 - 5x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0 \quad \text{ou} \quad (x - 2)(x + 3) = 0$$

Logo, as soluções são $-1, 2, 3\; e\; 6$. Observa-se que quando aplicaram a definição de função modular, voltaram para a ideia dos gêmeos de fatoração. Além disso, pode-se observar que não se necessita dos coeficientes dos gêmeos de fatoração, mas seu uso garante que os trinômios sejam fatoráveis.

Para Coxford e Shulte (1994) os professores que gostam de relacionar resolução de equações e inequações com gráficos de funções, certamente apreciam esse problema. De fato, neste caso considerações gráficas levam a compreender por que as soluções são quatro. Para $c > 0$, a figura 1a mostra que os gráficos de $y = |ax + b|$ e $y = c$ têm necessariamente dois pontos de interseção, garantindo assim que $|ax + b| = c$ tenha duas soluções. A figura 1b ilustra as funções associadas com o problema 2. Podemos ver que quando $c > 0$, os gráficos de $y = c$ e $y = |ax^2 + bx|$ terão dois, três ou quatro pontos de interseção, dependendo do valor de c.

Para a construção do gráfico foi utilizado nessa experiência o software Geogebra com o objetivo de facilitar a compreensão gráfica por parte dos alunos.



(a) (b)

Figura 1

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do desenvolvimento da proposta apresentada, percebeu-se que o tema gêmeos de fatoração estimulou a curiosidade dos alunos por conceitos algébricos e contribuiu para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa. Além disso, os resultados da experiência revelaram que, quando levamos para a sala de aula uma matemática que fuja do uso excessivo de fórmulas e que estimule a curiosidade dos alunos, certamente temos como implicações o envolvimento da turma e uma aprendizagem significativa.

4 REFERÊNCIAS

COXFORD, A.F.; SHULTE, A.; As Idéias da Álgebra; São Paulo: Atual, (1994).

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. Os polinômios no currículo da escola média. In: **As idéias de álgebra**. Organizadores Arthur F. Coxford; Alberto P. Shulte. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

MINOR, L. H. Gêmeos de Fatoração como Instrumento de Ensino. In: **As idéias de álgebra**. Organizadores Arthur F. Coxford; Alberto P. Shulte. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

SANTOS, J.; SANTOS, L. Fatorações de Polinômios. In: **Loucos por Matemática.** 2010, disponível em < http://www.rumoaoita.com/site/attachments/346_JORNAL%20LPM%20N%C3%9AMERO02.pdf>