



# ÁLGEBRA DE CLIFFORD APLICADA À ANÁLISE DA POTÊNCIA ELÉTRICA EM CIRCUITOS MONOFÁSICOS EM REGIME NÃO SENOIDAL

Rafael Furquim Júnior<sup>1</sup>  
Nivaldo Roberto Ferreira<sup>2</sup>  
Fernando Augusto Moreira<sup>3</sup>

## RESUMO

A primeira teoria criada para fazer a análise da potência em circuitos elétricos no regime permanente não senoidal foi devida a Budeanu em 1927. Ela se baseia numa extrapolação do método clássico utilizado para o regime puramente senoidal. Por não explicar adequadamente alguns aspectos do comportamento do fluxo de potências não ativo, permitiu a proposição de diversas outras teorias ao longo dos últimos quase 100 anos. Entre as mais recentes está a proposta de Castro-Núñez, que para modelar a potência não ativa e o caráter multivetorial da potência elétrica utiliza uma ferramenta matemática chamada Álgebra de Clifford ou Álgebra Geométrica, entretanto esta proposta ainda não atinge o objetivo, visto que, seus resultados divergem do domínio do tempo. Neste trabalho apresenta-se uma nova abordagem para a transformação entre os domínios do tempo e de Clifford, que se mostra capaz de reproduzir os resultados da análise da potência instantânea no domínio do tempo, bem como, propõem-se pela primeira vez, um operador de rotação, no domínio de Clifford, distinto para cada frequência presente no circuito.

**Palavras-chave:** Potência elétrica, Harmônicos, Circuitos não lineares, Potência reativa, Álgebra de Clifford.

## INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de uma teoria que explique adequadamente o comportamento dos fluxos de potência ativa e não ativa na presença de sinais não senoidais, distorcidos ou desequilibrados é um tema da engenharia elétrica que desafia a comunidade científica há quase 100 anos. A importância deste tema está calcada na necessidade de se entender e se demonstrar os fenômenos de transferência de energia em um circuito, quando o mesmo está sujeito a condições permanentes não senoidais, seja proveniente da alimentação ou ocasionada pela presença de uma carga não linear.

Neste trabalho, apresenta-se a álgebra geométrica de *Clifford* como uma ferramenta eficiente a ser utilizada para a solução de circuitos elétricos monofásicos em regime permanente não senoidal, preenchendo-se a lacuna existente entre os domínios do tempo e da

---

<sup>1</sup> Mestrando em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia - UFBA, [rafael.furquim@yahoo.com.br](mailto:rafael.furquim@yahoo.com.br);

<sup>2</sup> Professor Coorientador: Doutor em Geofísica pela Universidade Federal da Bahia - UFBA, [nivaldo@ufba.br](mailto:nivaldo@ufba.br);

<sup>3</sup> Professor Orientador: Doutor em Eng. Elétrica pela University of British Columbia - UBC, [moreiraf@ufba.br](mailto:moreiraf@ufba.br).

Esta pesquisa tem o apoio financeiro da Fapesb - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia.



frequência. Para isto, propõem-se uma nova transformação do domínio do tempo para o domínio de *Clifford*, bem como, propõem-se, pela primeira vez, um operador de rotação distinto para cada frequência  $\omega$ , tornando inequívoca a interpretação dos resultados das parcelas envolvidas no multivetor de potência no domínio de *Clifford*, o que não acontece com as propostas atuais, onde dois resultados, provenientes de parcelas distintas no domínio do tempo, não representam parcelas distintas no domínio da álgebra geométrica.

## METODOLOGIA

Sabendo-se que, a solução no domínio do tempo de circuitos no regime permanente não senoidal não traz inconsistências, utilizaremos como padrão de resposta neste trabalho, os resultados encontrados no domínio do tempo com o software *PSIM*, que são a base de comparação para os resultados obtidos no domínio de *Clifford*.

A álgebra de *Clifford*, também conhecida como álgebra geométrica, é uma ferramenta matemática capaz de manipular escalares, vetores e objetos geométricos de forma relativamente simples. Um entendimento em profundidade é apresentado em Hestenes e Sobczyk [8], neste trabalho apresenta-se apenas o conteúdo essencial, conforme Furquim et al [9]. A base da álgebra geométrica é estender o espaço vetorial euclidiano  $\mathbf{R}^n$  com uma operação de multiplicação, associativa e anticomutativa, designada produto geométrico dando origem a um espaço vetorial expandido  $CI(\mathbf{R}^n)$ , sendo fechado para a soma e multiplicação de vetores. Considerando-se a base ortonormal  $\{\sigma_1, \sigma_2\}$  do espaço vetorial euclidiano  $\mathbf{R}^2$  e dois vetores quaisquer  $V$  e  $W$  deste espaço, sendo:

$$V = v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 \quad (1)$$

$$W = w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2 \quad (2)$$

onde:  $\sigma_1, \sigma_2$  são vetores unitários ortogonais de  $\mathbf{R}^2$  e  $v_1\sigma_1, v_2\sigma_2, w_1\sigma_1, w_2\sigma_2$  são vetores de  $\mathbf{R}^2$ .

Obtém-se o espaço vetorial expandido  $CI(\mathbf{R}^2)$ , aplicando-se o produto geométrico de *Clifford* entre  $V$  e  $W$ , abaixo definido:

$$VW = V \cdot W + V \wedge W = (v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2)(w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2) \quad (3)$$

$$VW = v_1w_1\sigma_1^2 + v_1w_2\sigma_1\sigma_2 + v_2w_1\sigma_2\sigma_1 + v_2w_2\sigma_2^2 \quad (4)$$

onde:  $V \cdot W$  é o produto interno, um escalar, e corresponde ao produto interno euclidiano e  $V \wedge W$  é o produto externo, um novo tipo de elemento chamado bivector do espaço  $CI(\mathbf{R}^2)$ .

O produto geométrico (4) é agrupado utilizando-se do axioma apresentado abaixo:



$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow i = j \rightarrow \sigma_i^2 = \sigma_j^2 = 1 \\ -\sigma_j \sigma_i & \Leftrightarrow i \neq j \rightarrow \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \end{cases} \quad (5)$$

Do qual origina-se o elemento  $\sigma_i \sigma_j$ , anticomutativo, chamado bivector, o qual tem magnitude, direção e sentido, como um segmento de área orientado, abaixo exemplificado na Fig.1

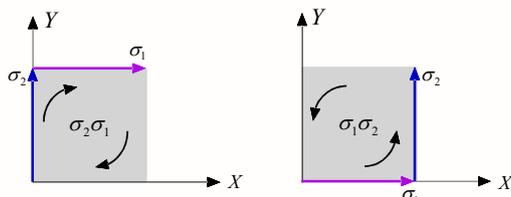


Fig. 1 Unidade bivectora. Fonte: Autor

Aplicando-se o axioma (5) ao produto geométrico (4) obtém-se no domínio geométrico de *Clifford*  $Cl(\mathbf{R}^2)$ :

$$VW = (v_1 w_1 + v_2 w_2) + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \sigma_1 \sigma_2 \quad (6)$$

Portanto, um escalar, que corresponde ao produto interno e um bivector, que corresponde ao produto externo. O produto externo da álgebra geométrica estende o conceito de número imaginário para um sistema de n-dimensões.

Conforme Hestenes e Sobczyk [8], a propriedade de contração, apresentada abaixo, é que diferencia a álgebra geométrica de *Clifford* de outras álgebras associativas, ao definir que o quadrado de vetores não nulos seja positivo.

$$a^2 = aa = a \cdot a = \|a\|^2 \quad (7)$$

onde:  $a$  é um vetor e  $\|a\|$  é um escalar positivo que corresponde a magnitude ou norma do vetor  $a$ .

Assim sendo, a propriedade acima proporciona uma medida de comprimento de vetores, no espaço vetorial de *Clifford*  $Cl(\mathbf{R}^2)$  que é a mesma do espaço vetorial euclidiano  $\mathbf{R}^2$ . Seja o vetor  $a = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2$ , um vetor qualquer de  $\mathbf{R}^2$ , aplicando-se (7) e (5) obtém-se a norma no domínio de *Clifford*:

$$a^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_1 a_2 \sigma_1 \sigma_2 + a_2 a_1 \sigma_2 \sigma_1 + a_2^2 \sigma_2^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad (8)$$

$$a^2 = \|a\|^2 \Rightarrow \|a\|^2 = a_1^2 + a_2^2 \Rightarrow \|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Em função da transformação proposta por Steinmetz (1897) [1] para o domínio da frequência, não se aplicam a circuitos com sinais n-senoidais, conforme apresenta-se abaixo, visto que, dois sinais distintos são representados pelo mesmo número complexo.

$$\begin{aligned} v(t) &= 100\sqrt{2} \cos(\omega t - 90^\circ) \rightarrow V_1 = 100e^{-j90^\circ} = -j100 \\ v(t) &= 100\sqrt{2} \cos(3\omega t - 90^\circ) \rightarrow V_3 = 100e^{-j90^\circ} = -j100 \end{aligned} \quad (9)$$

Esta pesquisa tem o apoio financeiro da Fapesb - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia.



Alguns pesquisadores, buscando preencher a ligação entre os domínios do tempo e da frequência, entre eles, Castro-Núñez (2013) [7], utilizaram-se da álgebra geométrica de *Clifford*, por ter as bases necessárias para representar sinais periódicos não senoidais, no entanto, não obtiveram êxito, pois os resultados de potência aparente apresentados divergem dos resultados obtidos no domínio do tempo, conforme apresenta-se em Furquim et al. [9].

Portanto, apresenta-se, neste trabalho, outra forma de representar as componentes, de tensão ou corrente, senoidais de frequência fundamental e frequências harmônicas, no domínio da álgebra geométrica, no entanto, coerentes com a definição de base ortonormal do espaço vetorial euclidiano  $\mathbf{R}^2$ , o que não ocorre em outras propostas. Bem como, propõem-se pela primeira vez, um operador de rotação distinto para cada frequência, o qual estende o conceito de número complexo para n-dimensões. As transformações propostas são:

$$x_c(t) = X_c \sqrt{2} \cos(n\omega t) \leftrightarrow X_c \sigma_{(2n-1)} \quad (10)$$

$$x_s(t) = X_s \sqrt{2} \sin(n\omega t) \leftrightarrow X_s \sigma_{(2n)} \quad (11)$$

onde:  $x_c(t)$  = sinal cosseno ou seno, de tensão ou corrente, na frequência ( $n\omega$ ),  $X_c \sigma_{(2n-1)} \rightarrow$  sinal cosseno no domínio da álgebra geométrica, de tensão ou corrente, na frequência ( $n\omega$ ), e  $X_s \sigma_{(2n)} \rightarrow$  sinal seno no domínio da álgebra geométrica, de tensão ou corrente, na frequência ( $n\omega$ ).

As funções cosseno e seno na frequência fundamental do domínio do tempo são mapeadas para o domínio geométrico como vetores  $x\sigma_1$  e  $y\sigma_2$ , respectivamente. O produto dos vetores acima por  $\sigma_2\sigma_1$  produz uma defasagem (rotação) de  $90^\circ$  no domínio geométrico de *Clifford*. Assim sendo, neste trabalho, propõem-se pela primeira vez, o operador de rotação  $\sigma_{(2n)(2n-1)}$ , abaixo definido, para cada frequência  $n\omega$ :

$$\sigma_{(2n)} \wedge \sigma_{(2n-1)} = \sigma_{(2n)(2n-1)} \quad (12)$$

onde: n = é a ordem da frequência harmônica sendo considerada.

A transformação e o operador de rotação propostos neste trabalho, estendem a transformação proposta por Steinmetz (1897) [1] para o regime periódico não senoidal, utilizando-se das propriedades da álgebra geométrica e de um sistema multivetorial. Dando-se origem a um sistema, no domínio de *Clifford*, totalmente coerente com as operações em regime não senoidal, no domínio do tempo. Apresentam-se, como exemplo, na Fig. 2 abaixo, as transformações e os operadores de rotação para as frequências fundamental  $n=1$ , e segunda harmônica  $n=2$ .

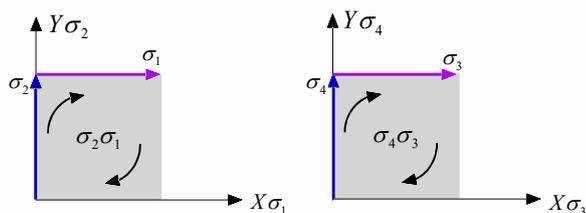


Fig. 2 Sistema multivetorial. Fonte: Autor.

Uma consequência da álgebra de *Clifford* é que utilizando-se do axioma (5) o quadrado de bivectores, como  $\sigma_2\sigma_1$ , resultam em  $-1$ , tal como  $(\sigma_2\sigma_1)^2 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_1 = -(\sigma_1)^2 = -1$ , o que é coerente com a definição da unidade imaginária  $j$  dos números complexos, tal que  $j^2 = (\sigma_2\sigma_1)^2 = -1$ . Assim sendo, pode-se reescrever as expressões para as reatâncias indutiva e capacitiva do domínio complexo para o domínio da álgebra geométrica, obtendo-se:

$$X_L = wL\sigma_2\sigma_1 \quad X_C = \frac{-\sigma_2\sigma_1}{wC} \quad (13)$$

Contudo, neste trabalho propomos a introdução de um operador de rotação (12) para cada frequência, portanto, as reatâncias indutiva e capacitiva ficam, pela primeira vez, assim definidas:

$$X_L = wL\sigma_{(2n)}\sigma_{(2n-1)} \quad X_C = \frac{-\sigma_{(2n)}\sigma_{(2n-1)}}{wC} \quad (14)$$

onde:  $\sigma_{(2n)(2n-1)} \rightarrow$  operador de rotação,  $X_L =$  reatância indutiva em Ohm,  $X_C =$  reatância capacitiva em Ohm,  $n$  é a ordem da frequência harmônica sendo considerada.

A equação da potência no domínio de *Clifford* é definida como um multivetor. Conforme Hestenes e Sobczyk [8], a álgebra geométrica pode incluir elementos de várias dimensões, tais como: 0-vetor, 1-vetor, 2-vetor, ...,  $k$ -vetor, para permitir representar as propriedades direcionais de pontos, linhas, planos e espaço. Assim sendo, a álgebra geométrica possui caráter multidimensional, ou multivetorial, ao permitir a adição de elementos de várias dimensões com um simples produto geométrico (3) e o axioma da álgebra geométrica (5). Portanto, para se expressar a potência em sistemas elétricos monofásicos, utiliza-se da equação abaixo:

$$S = VI = V \cdot I + VA I \quad (15)$$

onde:  $S =$  potência no domínio de *Clifford* em  $VA$ ,  $V =$  vetor de tensão no domínio de *Clifford*, e  $I =$  vetor de corrente no domínio de *Clifford*.

Aplicando-se os produtos interno e externo da álgebra geométrica, obtém-se produtos escalares e produtos de ordem  $k$ , os quais são agrupados da forma:



$$\mathcal{S} = \sum_{k=0}^n \langle \rangle_k \quad (16)$$

onde  $k=0$  representa um escalar (potência ativa),  $k=1$  um vetor,  $k=2$  um bivector e assim sucessivamente.

Obtendo-se então o multivetor potência:

$$\mathcal{S} = \langle \rangle_0 + \langle \rangle_1 + \langle \rangle_2 + \dots + \langle \rangle_n \quad (17)$$

Conforme Hestenes e Sobczyk [8], o reverso de um multivetor é encontrado realizando-se a operação abaixo indicada:

$$\mathcal{S}^\dagger = \sum_k (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot \langle \mathcal{S} \rangle_k \quad (18)$$

onde  $k$  representa a dimensão do  $k$ -vetor em questão.

Realizando-se a operação reversa, definida em [15], obtém-se a norma do multivetor:

$$\|\mathcal{S}\| = \sqrt{\langle \mathcal{S} \cdot \mathcal{S}^\dagger \rangle_0} \quad (19)$$

onde:  $\langle \mathcal{S} \cdot \mathcal{S}^\dagger \rangle_0$  representa a parte escalar do multivetor de potência  $\mathcal{S}$ .

## REFERENCIAL TEÓRICO

As propriedades da potência, nos circuitos elétricos de corrente alternada em regime não senoidal, são discutidas há quase um século e como resultado diversos trabalhos são publicados todos os anos. Apresenta-se aqui, as duas principais teorias que surgiram na tentativa de definir e explicar as potências ativa  $P$  e aparente  $S$  em circuitos  $n$ -senoidais e que permanecem em uso até o presente momento.

A primeira definição de potência, aplicada a circuitos monofásicos de corrente alternada, foi proposta por Steinmetz em 1897, na qual foram definidas as potências ativa  $P$ , aparente  $S$  e reativa  $Q$ , em regime permanente senoidal [1].

A primeira definição de potência no domínio da frequência, aplicada a circuitos monofásicos de corrente alternada em regime periódico não senoidal, foi proposta por Budeanu em 1927, na qual foram apresentadas as três parcelas que compõem a potência aparente  $S$ : potência ativa  $P$ , potência reativa  $Q_B$  e potência distorcida  $D_B$  [2]. Logo após Budeanu propor sua teoria no domínio da frequência, Fryze em 1931 propôs sua teoria para definição de potência no domínio do tempo, teoria esta baseada na decomposição ortogonal, dando origem às componentes de corrente ativa e não ativa [3].

Esta pesquisa tem o apoio financeiro da Fapesb - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia.



Contudo, estas teorias foram contestadas por vários pesquisadores e nas décadas de 70 a 90 surgiram outras teorias, destacando-se entre elas as teorias de Shepherd e Zakikhani em 1972 [4], Akagi et al. em 1983 [5] e Czarnecki em 1988 [6]. Embora continuem sendo publicados vários trabalhos a cada ano, acerca das várias teorias de potência propostas, ainda não há consenso entre a comunidade científica que aponte uma única teoria para explicar a potência não ativa em regime não senoidal.

Assim sendo, em 2013, Milton David Castro-Núñez [7] apresentou sua teoria propondo uma abordagem multivetorial para a transformação do domínio do tempo para o domínio geométrico da álgebra de *Clifford*, e conseqüentemente, modelagem da potência em regime permanente n-senoidal.

## DESENVOLVIMENTO

Nesta seção apresenta-se a solução do circuito da Fig. 3 abaixo, com uma fonte de tensão fundamental e uma fonte de tensão harmônica.

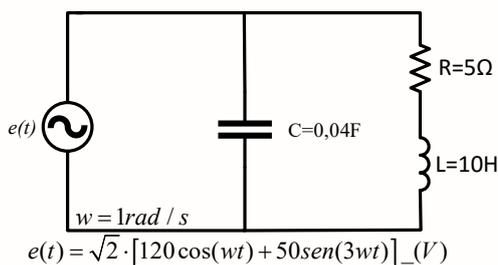


Fig. 3 Circuito com duas fontes, carga RL e capacitor em paralelo. Fonte: Autor.

Aplicando-se as transformações propostas em (10) e (11) aos sinais de tensão no domínio do tempo do circuito da Fig. 3, obtém-se os sinais de tensão no domínio de *Clifford*, resultando em:

$$\begin{aligned}
 \cos(n\omega t) &\Leftrightarrow \sigma_{(2n-1)} \rightarrow n=1 \rightarrow \sigma_1 \quad \text{sen}(n\omega t) \Leftrightarrow \sigma_{(2n)} \rightarrow n=3 \rightarrow \sigma_6 \\
 v_1(t) &= 120\sqrt{2} \cos(\omega t) \rightarrow V_1 = 120\sigma_1 \quad v_3(t) = 50\sqrt{2} \sin(3\omega t) \rightarrow V_3 = 50\sigma_6 \\
 V_T &= V_1 + V_3 \Rightarrow V_T = 120\sigma_1 + 50\sigma_6
 \end{aligned} \tag{20}$$

Considerando-se que, com o operador de rotação proposto neste trabalho, as reatâncias indutiva e capacitiva foram definidas em (14) e levando-se em consideração os sinais de frequência com  $n=1$  e  $n=3$  obtém-se os operadores de rotação das reatâncias:

$$n=1 \rightarrow \sigma_2\sigma_1 \quad n=3 \rightarrow \sigma_6\sigma_5 \tag{21}$$

Realizando-se os cálculos no domínio de *Clifford*, com as definições acima, para a frequência  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  obtém-se as seguintes correntes no circuito:



$$\begin{aligned}
 I_1' &= \frac{120\sigma_1}{5+1\cdot 10\sigma_2\sigma_1} = \frac{120\sigma_1}{5+10\sigma_2\sigma_1} \cdot \frac{5-10\sigma_2\sigma_1}{5-10\sigma_2\sigma_1} = \frac{600\sigma_1+1200\sigma_2}{125} \\
 I_1'' &= \frac{120\sigma_1}{-\sigma_2\sigma_1} = \frac{120\sigma_1}{-25\sigma_2\sigma_1} \cdot \frac{\sigma_2\sigma_1}{\sigma_2\sigma_1} = \frac{-120\sigma_2}{25} \\
 &\quad 1\cdot 0,04 \\
 I_1 &= I_1' + I_1'' \Rightarrow I_1 = \frac{600\sigma_1+600\sigma_2}{125}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Realizando-se os cálculos no domínio de *Clifford*, com as definições acima, para a frequência  $\omega = 3\text{rad/s}$  obtém-se a seguinte corrente no circuito:

$$\begin{aligned}
 I_3' &= \frac{50\sigma_6}{5+3\cdot 10\sigma_6\sigma_5} = \frac{50\sigma_6}{5+30\sigma_6\sigma_5} \cdot \frac{5-30\sigma_6\sigma_5}{5-30\sigma_6\sigma_5} = \frac{250\sigma_6-1500\sigma_5}{925} \\
 I_3'' &= \frac{50\sigma_6}{-\sigma_6\sigma_5} = \frac{50\sigma_6}{-25\sigma_6\sigma_5} \cdot \frac{\sigma_6\sigma_5}{\sigma_6\sigma_5} = \frac{+150\sigma_5}{25} \\
 &\quad 3\cdot 0,04 \quad 3 \\
 I_3 &= I_3' + I_3'' \Rightarrow I_3 = \frac{250\sigma_6+4050\sigma_5}{925}
 \end{aligned} \tag{23}$$

A corrente total na carga do circuito obtém-se com a soma de  $I_1$  (22) e  $I_3$  (24) resultando em:

$$I_T = \frac{600\sigma_1+600\sigma_2}{125} + \frac{250\sigma_6+4050\sigma_5}{925} \tag{24}$$

Aplicando-se (15), nas tensões em (20) e na corrente em (24), calculam-se as parcelas de potências no domínio de *Clifford* fornecidas pelas fontes do circuito.

$$S = VI = (120\sigma_1 + 50\sigma_6) \cdot \left( \frac{600\sigma_1+600\sigma_2}{125} + \frac{250\sigma_6+4050\sigma_5}{925} \right) \tag{25}$$

$$S = \left\{ \begin{aligned} &\left( 576\sigma_1^2 + 576\sigma_1\sigma_2 + \frac{486\cdot 10^3}{925}\sigma_1\sigma_5 + \frac{30\cdot 10^3}{925}\sigma_1\sigma_6 \right) + \\ &\left( 240\sigma_6\sigma_1 + 240\sigma_6\sigma_2 + \frac{202,5\cdot 10^3}{925}\sigma_6\sigma_5 + \frac{12,5\cdot 10^3}{925}\sigma_6^2 \right) \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

Aplicando-se o axioma (5) às parcelas do multivetor (26 4.31) contendo  $\sigma_1^2=1$  e  $\sigma_6^2=1$  conclui-se que são parcelas escalares e, portanto, trata-se de potência ativa. Obtendo-se então:

$$P = \left( 576 + \frac{12,5\cdot 10^3}{925} \right) = 589,5135 \text{ W} \tag{27}$$

Para realizar-se a análise de potência aparente, aplica-se (18) a cada parcela bivectora do multivetor (26), calculando-se o reverso de cada parcela:

$$S^\dagger = (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} \cdot \left[ \langle +576\sigma_1\sigma_2 \rangle_2 \right] = -576\sigma_1\sigma_2 \tag{28}$$

onde:  $k=2$  dado que as parcelas são bivectores.

Assim sendo, para todas as parcelas do multivetor que correspondem a bivectores, haverá a inversão de sinal, obtendo-se assim:



$$\mathbf{S}^\dagger = \left\{ \begin{array}{l} \left( 576 - 576\sigma_1\sigma_2 - \frac{486 \cdot 10^3}{925}\sigma_1\sigma_5 - \frac{30 \cdot 10^3}{925}\sigma_1\sigma_6 \right) + \\ \left( -240\sigma_6\sigma_1 - 240\sigma_6\sigma_2 - \frac{202,5 \cdot 10^3}{925}\sigma_6\sigma_5 + \frac{12,5 \cdot 10^3}{925} \right) \end{array} \right\} \quad (29)$$

Para se calcular a norma do multivetor aplica-se (19) aos resultados (26) e (29), obtendo-se:

$$\|\mathbf{S}\| = \sqrt{\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^\dagger \rangle_0} = \sqrt{\left\langle \begin{array}{l} \left( 576 + 576\sigma_1\sigma_2 + \frac{486 \cdot 10^3}{925}\sigma_1\sigma_5 + \frac{30 \cdot 10^3}{925}\sigma_1\sigma_6 \right) + \\ \left( 240\sigma_6\sigma_1 + 240\sigma_6\sigma_2 + \frac{202,5 \cdot 10^3}{925}\sigma_6\sigma_5 + \frac{12,5 \cdot 10^3}{925} \right) \\ \left( 576 - 576\sigma_1\sigma_2 - \frac{486 \cdot 10^3}{925}\sigma_1\sigma_5 - \frac{30 \cdot 10^3}{925}\sigma_1\sigma_6 \right) + \\ \left( -240\sigma_6\sigma_1 - 240\sigma_6\sigma_2 - \frac{202,5 \cdot 10^3}{925}\sigma_6\sigma_5 + \frac{12,5 \cdot 10^3}{925} \right) \end{array} \right\rangle_0} \quad (30)$$

Levando-se em consideração que na equação acima interessa-nos apenas a parte escalar da multiplicação, a equação se reduz ao apresentado abaixo:

$$\mathbf{S} = \sqrt{\left\langle \begin{array}{l} \left( 576^2 + 576^2 + \left( \frac{486 \cdot 10^3}{925} \right)^2 + \left( \frac{30 \cdot 10^3}{925} \right)^2 \right) + \\ \left( 240^2 + 240^2 + \left( \frac{202,5 \cdot 10^3}{925} \right)^2 + \left( \frac{12,5 \cdot 10^3}{925} \right)^2 \right) \end{array} \right\rangle} = 1050,6963 \text{ VA} \quad (31)$$

Analisando-se no domínio de *Clifford*, aplica-se (19) e calcula-se a norma da potência reativa  $\mathbf{Q}$  com os valores de potência reativa em (30), obtendo-se:

$$\|\mathbf{Q}\| = \sqrt{\langle \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\dagger \rangle_0} = \sqrt{\left\langle 576^2 + \left( \frac{202,5 \cdot 10^3}{925} \right)^2 \right\rangle} = 616,1992 \text{ VA} \quad (32)$$

Analisando-se no domínio de *Clifford*, verifica-se que entre as potências cruzadas em (30) existem valores de mesma base,  $\{\sigma_1, \sigma_6\}$  neste caso, nas quais aplica-se o axioma (5) da álgebra de *Clifford* e reduz-se a um único valor dessa base.

Na sequência, aplica-se (19) e calcula-se a norma de  $\mathbf{D}$  com os valores de potências cruzadas em (30), obtendo-se:

$$\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\langle \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^\dagger \rangle_0} = \sqrt{\left\langle \left( \frac{486 \cdot 10^3}{925} \right)^2 + \left( \frac{30 \cdot 10^3}{925} - 240 \right)^2 + 240^2 \right\rangle} = 613,7875 \text{ VA} \quad (33)$$

No entanto, para se permitir a comparação entre os resultados obtidos no domínio do tempo, com o software *PSIM*, e o calculado para o domínio de *Clifford*, faz-se necessário apresentar um valor único de potência reativa, obtendo-se de (32) e (33):

$$\mathbf{Q}_{PSIM} = \sqrt{\mathbf{Q}^2 + \mathbf{D}^2} = \sqrt{616,1992^2 + 613,7875^2} = 869,7336 \text{ VA} \quad (34)$$



Na Fig. 4 abaixo, apresenta-se a tela inicial do software *PSIM* com o circuito da Fig. 3 já implementado e pronto para ser simulado.

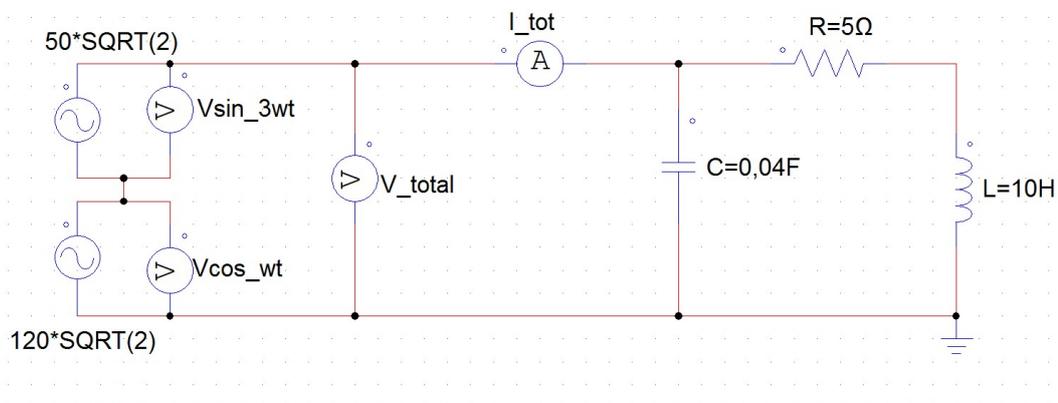


Fig. 4 Circuito 02 com duas fontes, carga RL e capacitor em paralelo. Fonte: Autor.

Uma vez implementado o circuito acima no software *PSIM*, os valores no domínio do tempo, são obtidos de maneira muito simples, visto que, já existem funções pré-definidas para Potência Ativa, Potência Aparente, Fator de Potência, entre outras.

Para ilustrar-se o caráter não senoidal do circuito sendo analisado, apresenta-se na Fig. 5, abaixo, o gráfico de tensão e corrente entregues aos elementos R, L e C.

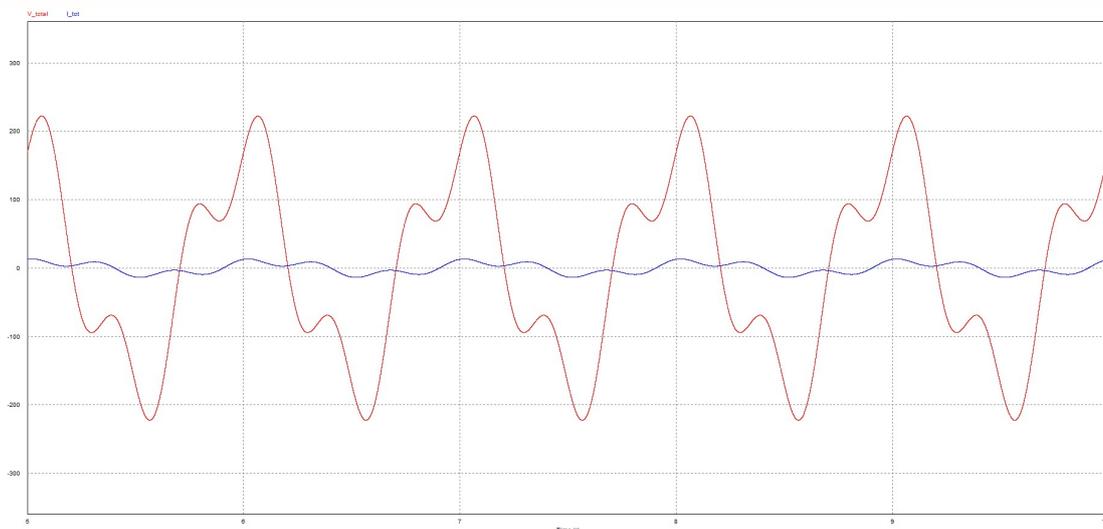


Fig. 5 Gráfico de tensão e corrente entregues à carga no software *PSIM*. Fonte: Autor.

Na sequência, apresenta-se, no próximo tópico, a comparação entre os resultados obtidos no domínio do tempo e no domínio de *Clifford*.



## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresenta-se, a seguir, na tabela 1, os resultados obtidos na análise do circuito monofásico da Fig. 3, em regime não senoidal. Bem como, se analisa a performance dos resultados obtidos no domínio de *Clifford*, com a transformação e operador de rotação propostos, em relação aos resultados obtidos no domínio do tempo com o software *PSIM*.

Tabela 1 Análise da Potência. Fonte: Autor.

Resultados obtidos neste trabalho.				
Termos de Potência	Domínio do tempo com o software <i>PSIM</i>		Domínio de <i>Clifford</i>	
S (VA)	1050,6963		1050,6963	
P (W)	589,5135		589,5135	
Q (VAr)	*		616,1992	
D (VAr)	*		613,7875	
Q <sub>PSIM</sub> (VAr)	869,7336	(1)	869,7336	(3)
Fator de Potência	0,56106936	(2)	0,56106936	(4)

onde \* = não disponível no software *PSIM*, (1) calculado com o fator de potência informado pelo *PSIM*, (2) informado pelo *PSIM*, (3) calculado em função de *Q* e *D* no domínio de *Clifford* e (4) calculado em função de *S* e *P* no domínio de *Clifford*.

Portanto, verifica-se que foram obtidos no domínio de *Clifford*, resultados idênticos ao domínio do tempo com o software *PSIM*.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi possível verificar que, com a transformação e operador de rotação propostos neste trabalho, os resultados obtidos no domínio de *Clifford* reproduzem exatamente os resultados obtidos no domínio do tempo.

E que, utilizando-se da transformação e operador de rotação propostos neste trabalho, fica comprovada a capacidade da álgebra geométrica de *Clifford* de absorver completamente a álgebra dos números complexos e, portanto, estender o conceito de Steinmetz [1], de sistemas monofásicos senoidais, para sistemas monofásicos em regime não senoidais, de forma inequívoca e imediata, o que não acontece em outras propostas, onde os resultados de



potência aparente no domínio de *Clifford* não correspondem aos resultados de potência aparente no domínio do tempo.

A principal contribuição deste trabalho é apresentar um modelo matemático consistente para solução de circuitos elétricos monofásicos em regime permanente não senoidal, pois, a solução no domínio do tempo não apresenta inconsistências, contudo é um processo trabalhoso e longo, que exige várias manipulações trigonométricas.

## REFERÊNCIAS

- [1] C. P. Steinmetz, *Theory and Calculation of Alternating Current Phenomena*. New York: McGraw-Hill, 1897.
- [2] C. I. Budeanu, "Puissances Reactives et Fictives," *Institute Romain de l.Energie*, no. 2, 1927.
- [3] S. Fryze, "Moc, Rzeczywista, Urojona i Pozorna w Obwodach Elektrycznych o Przebiegach Odkształconych Prądu i Napięcia," *Przegląd Elektrotechniczny*, vol. XIII, no. 7 i 8, pp. 193-203 i 225-234, 1931.
- [4] W. Shepherd and P. Zakikhani, "Suggested Definitions of Reactive Power for Nonsinusoidal Systems," *IEEE Proceedings*, vol. 9, no. 119, pp. 1361–1362, 1972.
- [5] H. Akagi, Y. Kanazawa and A. Nabae, "Generalized Theory of the Instantaneous Reactive Power in Three-Phase Circuits," in *IPEC – International Power Electronics Conference*, Tokyo, 1983, pp. 1375-1386.
- [6] L. S. Czarnecki, "Orthogonal Decomposition of the Currents in a 3-phase Nonlinear Asymmetrical Circuit with a Nonsinusoidal Voltage Source," *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, vol. 1, no. 37, pp. 30–34, March 1988.
- [7] Castro-Núñez, M. D. *The Use of Geometric Algebra in the Analysis of Non-sinusoidal Networks and the Construction of a Unified Power Theory for Single Phase Systems - A Paradigm Shift*. Calgary: University of Calgary, 2013.
- [8] Hestenes, D., Sobczyk, G., "Clifford Algebra to Geometric Calculus - A Unified Language for Mathematics and Physics", D. Reidel Publishing Company, Dordiecht, Holland, 1984.
- [9] Furquim Jr., R., Ferreira, N. R., Moreira, F. A., "Álgebra de Clifford aplicada a Análise da Potência Elétrica em Sistemas Monofásicos sob Condições não Senoidais." VIII Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos, Santo André - SP, 2020.